

中图分类号: V231.3

论文编号: 10006BY0304116

北京航空航天大学
博士学位论文

非定常环境中叶片边界层时空
演化机制的大涡模拟

作者姓名 叶 建

学科专业 流体机械及工程

指导教师 陈懋章 教授

邹正平 教授

培养学院 能源与动力工程学院

**Large-eddy simulation of blade boundary layer
spatio-temporal evolution under unsteady disturbances**

A Dissertation Submitted for the Degree of Doctor of Philosophy

Candidate: Ye Jian

Supervisor: Prof. Chen Maozhang

Prof. Zou Zhengping

School of Jet Propulsion

Beihang University, Beijing, China

中图分类号：V231.3

论文编号：10006BY0304116

博 士 学 位 论 文

非定常环境中叶片边界层时空 演化机制的大涡模拟

作者姓名	叶 建	申请学位级别	工学博士
指导教师姓名	陈懋章 邹正平	职 称	教授
学科专业	流体机械及工程	研究方向	叶轮机械内部复杂流动
学习时间自	2003 年 9 月 日	起至	年 月 日止
论文提交日期	年 月 日	论文答辩日期	年 月 日
学位授予单位	北京航空航天大学	学位授予日期	年 月 日

关于学位论文的独创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在指导教师指导下独立进行研究工作所取得的成果，论文中有关资料和数据是实事求是的。尽我所知，除文中已经加以标注和致谢外，本论文不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含本人或他人为获得北京航空航天大学或其它教育机构的学位或学历证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对研究所做的任何贡献均已在论文中作出了明确的说明。

若有不实之处，本人愿意承担相关法律责任。

学位论文作者签名：_____ 日期： 年 月 日

学位论文使用授权书

本人完全同意北京航空航天大学有权使用本学位论文（包括但不限于其印刷版和电子版），使用方式包括但不限于：保留学位论文，按规定向国家有关部门（机构）送交学位论文，以学术交流为目的赠送和交换学位论文，允许学位论文被查阅、借阅和复印，将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，采用影印、缩印或其他复制手段保存学位论文。

保密学位论文在解密后的使用授权同上。

学位论文作者签名：_____ 日期： 年 月 日

指导教师签名：_____ 日期： 年 月 日

摘 要

无人飞行器在高空巡航时,其发动机部件将工作在很低的雷诺数下,低雷诺数条件对发动机的运行会产生显著影响,其中负面效应最大的是低压涡轮部件。对于低压涡轮而言,如何深入理解低雷诺数条件下叶片表面边界层的时空演化机制,进而采取有效措施控制边界层的转捩与分离,特别是叶片表面的非再附式分离,将是低雷诺数低压涡轮设计中最为关键的技术之一。本文围绕非定常环境中涡轮叶片边界层时空演化机制这一核心问题,利用大涡模拟方法作为主要的数值手段,开展了相关的研究工作。

低雷诺数条件下,涡轮叶片表面存在的复杂流动现象使得传统的雷诺平均方法很难满足机理研究的要求,而作为雷诺平均和直接数值模拟折衷的大涡模拟则是处理这一问题的理想方法。据此发展了一套多块并行的大涡模拟程序,该程序的主要特点包括:控制方程为可压缩的 Navier-Stokes 方程组,亚格子模型使用动力涡粘模型;方程采用有限体积法离散,对流项为四阶偏斜对称的中心格式,通过添加人工粘性或显式滤波消除流场中的非物理振荡,粘性项为二阶中心格式,时间推进为 3 阶 3 步的显式 Runge-Kutta 方法;程序能够处理任意界面匹配的多块结构化网格,利用计算域分解和消息传递的并行编程环境 (MPI),实现对复杂流动的高效并行计算;提供自由流湍流、周期性尾迹等进口边界条件的生成方法,对真实物理环境有较强的模拟能力。实践表明,新发展的程序计算精度较高,能够处理具有复杂几何/物理边界条件的流动问题,适合于叶轮机械内部复杂流动现象的机理研究。

选择充分发展的槽道湍流和亚临界的圆柱绕流作为校验算例,通过改变计算参数设置,对新程序进行了广泛而细致的测试,测试结果显示:为保证计算的稳定性,亚格子应力张量的各向同性分量应设为 0;人工粘性的大小会对计算结果产生较为明显的影响,实践中应根据具体的流动情况进行适当的调整。

对 $Re_h = 60154$ 、 $Ma_h = 0.402$ 的低压涡轮叶栅流动进行了模拟,结合对照实验,一共进行了四种不同入口边界条件的计算,即 C1-定常来流,C2-有背景湍流度的定常来流,C3-周期性尾迹来流和 C4-有背景湍流度的周期性尾迹来流。对定常来流条件(算例 C1、C2)计算结果的分析表明:两个算例中吸力面后部都会出现大尺度的开放式分离,C1 的分离区尺寸比 C2 的更大;C1、C2 中吸力面分离剪切层的转捩都通过 Kelvin-Helmholtz (K-H) 不稳定性发生,但由于背景湍流度的影响,C2 的自由剪切层发展更快,较 C1 提前失稳,因而其分离区尺寸较小。对周期性尾迹作用下叶栅流动(算例 C3、C4)计

算结果的分析表明：由于尾迹的频率较高且强度较大，整个叶栅通道的流动特性很大程度上被尾迹所控制，背景湍流度的效应则十分有限，因此 C3、C4 的计算结果非常接近；在周期性尾迹的扫掠下，吸力面大尺度分离区域不再存在，取而代之以小尺寸的分离泡，叶栅的总压损失大大降低；边界层转捩过程中，K-H 不稳定性及随机产生的湍流斑均发挥作用，湍流斑出现的位置既可能在分离点之前，也可能在分离后的自由剪切层中，其结构上则主要由涡环组成。

关键词：低雷诺数，低压涡轮，大涡模拟，背景湍流度，周期性尾迹，分离，转捩，湍流斑

Abstract

For high-altitude cruising unmanned aerial vehicles (UAVs), the aero-engine components operate at low Reynolds number condition, which has a significant impact on the running of the engines and the biggest negative effects are on low pressure turbines (LPTs). An in-depth understanding of blade boundary layer spatio-temporal evolution is crucial for the effective management and control of boundary layer transition or separation, especially the open separation, which is a key technology for the design of low Reynolds number LPT. Focusing on the blade boundary layer spatio-temporal evolution of LPT under unsteady environments, a series of research works were conducted through large-eddy simulation (LES), during my Ph.D. study.

Under low Reynolds number conditions, the complex flow phenomena on LPT blade surface make conventional Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) method difficult to meet the requirements of mechanism study. As a compromise between RANS and direct numerical simulation (DNS), LES is thought suitable for dealing with this problem. Then a multi-block parallel LES code was developed, which possesses the following features: the governing equations are compressible Navier-Stokes equations and the subgrid-scale (SGS) model is dynamic Smagorinsky model. The finite volume method was used to discretize the equations, the convective terms are fourth order skew-symmetric-like centered schemes, to remove the spurious odd-even oscillations, artificial viscosity terms were added to the equations or explicit filtering operations were used, viscous terms are second order centered scheme and time integration is third-order three-stage compact Runge-Kutta method. The code can deal with arbitrary multi-block grid with matching interfaces, which has also the ability of high-performance parallel computing through domain decomposition and message processing interface (MPI). Inflow boundary conditions for free-stream turbulence, periodic wakes are provided in the code. Numerical tests indicate that the new code is of high order accuracy and able to deal flow problems with complex geometry or physical boundary conditions, so it is suitable for the applications of complex flow phenomena in turbomachinery.

Fully developed turbulent channel flow and sub-critical flow around circular cylinder

were used to validate the new code. Through changing calculation parameters, a wide range of tests were conducted. Test results indicate that, to ensure the stability of the calculation, the isotropic parts of SGS stress tensor should be set to zero, and values of artificial viscosity would influence the numerical results obviously, which should be adjusted according to the flow conditions of certain problems.

A LPT cascade flow was simulated under conditions of Reynolds number 60154 and Mach number 0.402. Referring the experiment data available, computations for four cases with different inflow boundary conditions were carried out, they are C1 – steady inflow, C2 – steady inflow with background turbulence, C3 – periodic wakes inflow and C4 – periodic wakes inflow with background turbulence. For steady inflow cases C1 and C2, numerical results indicated that, large separation regions all appeared in the suction side rear part of the blade, the scale of separation region of C1 was bigger than C2. The transition in laminar separated shear flows of C1 and C2 were all dominated by Kelvin-Helmholtz (K-H) instability, for case C2, the background turbulence promoted the destabilization and transition process of separated shear layer, so a smaller separation region appeared. For periodic wake inflow cases C3 and C4, numerical results indicated that, because of the high passing frequency and high intensity of the wakes, flow phenomena in cascade were dominated by the effects of periodically sweeping wakes and, in contrast with case C2, the effects of background turbulence were small, so the results of C3 and C4 are similar. Under the sweeping of periodic wakes, large separation regions were replaced by small scale separation bubbles, and the total pressure loss of the cascade significantly decreased. K-H instability and turbulent spots are all effective factors in the transition process, the turbulent spots may appear before the separation point, or appear in the separated free shear layer, and the structure of the spots looks like a series of vortex loops.

Key words: low Reynolds number, low pressure turbine, large-eddy simulation, background turbulence, periodic wakes, separation, transition, turbulent spot

目 录

摘 要	i
Abstract	iii
目 录	v
第一章 绪 论	1
1.1 课题背景	1
1.2 大涡模拟的历史与现状	3
1.2.1 湍流数值模拟方法	4
1.2.1.1 直接数值模拟	6
1.2.1.2 雷诺平均	7
1.2.1.3 大涡模拟	8
1.2.1.4 Hybrid RANS/LES	11
1.2.1.5 小结	13
1.2.2 大涡模拟的发展历程	14
1.2.3 大涡模拟的研究现状	16
1.2.3.1 两种不同的研究观点	17
1.2.3.2 大涡模拟中的新方法和新模型	19
1.2.3.3 高雷诺数与高马赫数的挑战	21
1.2.3.4 大涡模拟的应用	23
1.3 低压涡轮内部的非定常流动	25
1.3.1 非定常气动环境	25
1.3.2 尾迹在叶栅通道内的输运	25
1.4 边界层的转捩与分离	26
1.4.1 附着流转捩机理	27
1.4.2 湍流斑的研究进展	30
1.4.3 层流分离流动	32
1.4.4 转捩和分离的大涡模拟	37
1.5 尾迹与边界层的相互作用	38
1.5.1 尾迹诱导的附着流转捩	38
1.5.2 尾迹诱导附着流转捩对分离区的影响	39
1.5.3 尾迹诱导的分离流转捩	40
1.6 本文的主要工作	41
第二章 控制方程与亚格子模型	43
2.1 滤波后的控制方程	43
2.1.1 Navier-Stokes方程及其无量纲化	43
2.1.2 滤波操作与滤波器	45
2.1.3 滤波后的控制方程	46
2.2 亚格子模型	48
2.2.1 动量方程的亚格子模型	49

2.2.1.1 Smagorinsky 涡粘模型	49
2.2.1.2 动力涡粘模型	50
2.2.2 能量方程的亚格子模型	53
2.2.2.1 亚格子热通量	54
2.2.2.2 亚格子湍流扩散	55
2.2.3 大涡模拟的控制方程组	55
第三章 数值求解方法	58
3.1 数值方法的选取	58
3.2 控制方程组的空间离散	59
3.2.1 对流通量的计算	60
3.2.1.1 偏斜对称格式	60
3.2.1.2 矩阵人工粘性	61
3.2.1.3 显式滤波	63
3.2.2 粘性通量的计算	64
3.3 控制方程组的时间离散	65
3.4 定解条件	66
3.4.1 边界条件	67
3.4.1.1 固壁边界	67
3.4.1.2 远场边界	68
3.4.1.3 亚音进口	68
3.4.1.4 亚音出口/缓冲区	69
3.4.1.5 周期性边界/网格块界面	72
3.4.2 初始条件	72
3.5 并行策略	73
3.6 计算结果的后处理	74
3.6.1 计算结果的统计分析	75
3.6.2 边界层参数的计算方法	77
3.6.3 旋涡识别法则	79
3.7 程序中的某些具体问题	81
3.7.1 滤波运算	81
3.7.2 模型系数的特殊处理	83
3.7.3 网格分辨率要求	83
第四章 程序验证	85
4.1 槽道湍流的大涡模拟	85
4.1.1 流向体力项	86
4.1.2 定解条件及数据后处理	87
4.1.3 算例说明	90
4.1.4 统计结果分析	93
4.1.5 瞬态流场分析	99
4.2 圆柱绕流的大涡模拟	103
4.2.1 算例说明	105
4.2.2 统计结果分析	108
4.2.3 瞬态流场分析	117

4.3 小结	121
第五章 定常来流下的低压涡轮叶栅流动	122
5.1 对照实验介绍	122
5.2 算例说明	124
5.3 定解条件	128
5.3.1 进口边界条件	128
5.3.1.1 均匀各向同性湍流的模拟	130
5.3.1.2 时间演化尾迹流的模拟	133
5.3.1.3 进口边条的执行	138
5.3.2 出口边界条件	141
5.3.3 初场设置	141
5.4 计算结果分析	142
5.4.1 时均流动图画	143
5.4.2 瞬态流动图画	149
5.4.3 高阶统计量	154
5.4.4 叶片的近前缘流动	157
5.4.5 吸力面分离流动机理	160
5.4.6 背景湍流度对吸力面分离流动的影响	167
5.4.7 小结	172
第六章 周期性尾迹作用下的低压涡轮叶栅流动	174
6.1 计算参数设置与计算结果后处理	174
6.2 时均流动图画	176
6.2.1 叶栅流动全貌	179
6.2.2 吸力面边界层的发展	182
6.3 瞬态流动图画	188
6.4 高阶统计量	195
6.5 尾迹在叶栅通道内的输运	199
6.5.1 相均流动图画	199
6.5.2 瞬态流动图画	202
6.6 尾迹诱导的分离流转捩机理	204
6.6.1 吸力面边界层的时空演化图景	204
6.6.2 尾迹作用下的分离泡转捩图画	210
6.7 小结	213
主要结论与研究展望	215
参考文献	220
附录A MPLES程序说明	246
A.1 MPLES的总体结构	246
A.2 MPLES的计算流程	247
附录B 不同无量纲化体系间的变换	249
B.1 一般的变换关系	249
B.2 来流湍流度的变换	251

B.3 来流尾迹的变换	253
攻读博士学位期间取得的研究成果	257
致 谢	259
作者简介	260

第一章 绪 论

1.1 课题背景

无人驾驶飞机 (unmanned aerial vehicle, UAV) 是一种有动力、通过气动力提供升力、能自主或遥控飞行、单次或可重复使用的无人驾驶航空器^[1], 与载人飞机相比, 无人机具有体积小、造价低、无人员伤亡、续航力强、对作战环境要求低等优点, 可以完成高空侦察、对地攻击、电子对抗、通信导航等任务。近年来发生的几场局部战争中, 无人机卓有成效的执行了多种军事任务, 显示出良好的发展前景, 在航空技术发达的西方国家越来越受到重视: 2005年, 美国国防部公布了新版的无人机路线图, 对美军 2005~2030年无人机的发展进行了规划^[1]; 北约也随后制定了类似的无人机发展路线图^[2]。

无人机虽然拥有众多优点、存在巨大的发展潜力, 但其动力装置却面临着不少新的挑战: 作为高空长航时 (high altitude long endurance, HALE) 无人机动力的涡轮风扇发动机, 面临的最大的问题便是发动机在高空巡航时耗油率较地面工作状态急剧上升。以 PW545 发动机为例, 实验表明该发动机在高空巡航状态时耗油率将上升几个百分点^[3]; 同样的情况存在于“全球鹰”高空无人侦察机的发动机 AE3007H 中, 在高空 19,800 米巡航状态工作时, 该发动机耗油率将显著上升^[4]。

研究结果表明发动机耗油率上升的主要原因之一是源自雷诺数的急剧降低: 由于大气密度随高度的增加而迅速减小, 当飞行高度达到 20,000 米时, 雷诺数与地面相比将降低一个数量级^[5]; 另外由于高空无人平台任务的需求, 无人机巡航时速度较低, 其发动机的尺寸较小, 这些都导致了发动机部件的流动雷诺数处在很低的水平^[6]。

低雷诺数条件对发动机各部件的运行均会产生影响, 其中负面效应最大的是低压涡轮部件: 在现代航空发动机中, 低压涡轮主要用来驱动风扇和增压级, 由于转速和进口燃气的温度、压力都较低, 单级低压涡轮的输出功率有限, 因而通常级数较多, 其重量可占整台发动机重量的 20-30%^[7]; 低压涡轮对发动机的总体性能有着很大影响, 以发动机耗油率为例, 在 35,000 英尺高空, 马赫数等于 0.8 时, 低压涡轮效率若降低 1%, 则发动机耗油率会上升 0.7-0.9%, 成为影响发动机总体性能最大的部件之一^[8], 并且这种影响随着涵道比的增加将进一步增大。

图 1 给出了某中等尺寸发动机在工作条件下各部件的雷诺数, 可以看出, 在发动机主要部件中, 低压涡轮的工作雷诺数处于最低水平^[9]。典型的低压涡轮叶片雷诺数范围

通常在 $0.5 \times 10^5 \sim 5 \times 10^5$ 之间^[10]，但在高空条件下，由于密度降低而导致雷诺数降低，无人机所用发动机的低压涡轮工作雷诺数可以降至 $1 \times 10^4 \sim 2 \times 10^4$ ，远远低于自模化雷诺数。在这种情况下，雷诺数将成为影响低压涡轮性能的主要因素之一，其影响在设计中不可忽略。图 2 给出了 PW545 发动机低压涡轮效率随雷诺数变化的曲线，可以清楚看到，无论是实验还是数值模拟结果都显示效率随雷诺数降低而下降，并且这种变化趋势是非线性的，在高空下降的幅度更为明显^[11]。

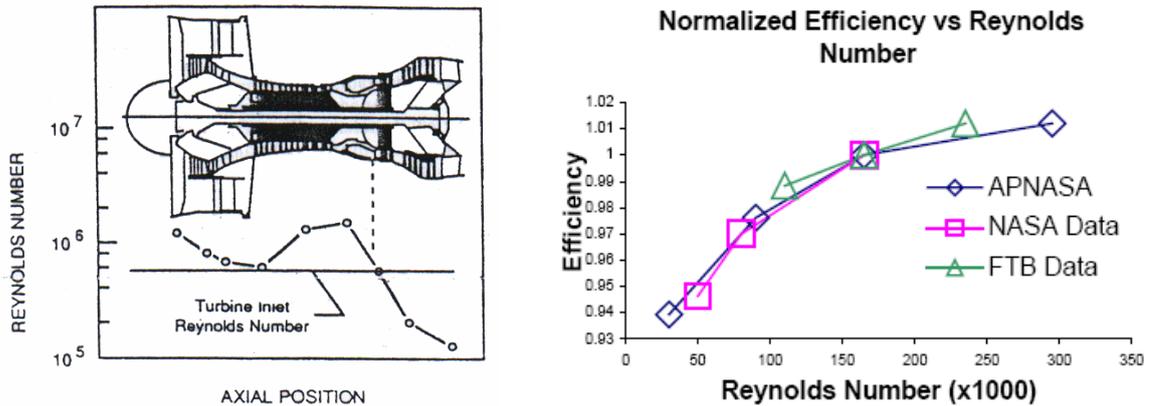


图 1 某中等尺寸发动机各部件雷诺数^[9]

图 2 低压涡轮效率随雷诺数的变化^[11]

低压涡轮叶片典型的展弦比在 3:1 到 7:1 之间，由于展弦比大，二次流损失所占比例较小，叶型损失成为影响其气动效率的主要因素；而叶型损失中，吸力面产生的气动损失可高达 60%，是叶型损失的主要源泉^[12]。Howell 等的进一步研究表明，吸力面产生的损失中，绝大部分又与分离泡有关，包括分离引起的损失、自由剪切层转捩、再附过程中的湍流掺混等等^[13]。在低雷诺数条件下，叶片吸力面的很大部分区域处于层流状态，虽然层流边界层的摩擦阻力较小，但流动抵抗分离的能力弱，在吸力面后部减速区逆压梯度的作用下，边界层增厚并极易发生分离，一旦发生层流分离，将使叶型损失急剧增加，发动机的效率下降，耗油率上升，这正是高空低雷诺数条件下发动机性能恶化的主要原因之一。

因此，对于低压涡轮而言，如何深入理解低雷诺数条件下叶片表面边界层的时空演化机制，进而采取有效措施控制边界层的转捩与分离，特别是叶片表面的非再附式分离，将是低雷诺数低压涡轮设计中最为关键的技术之一。有效控制叶片表面分离，将有利于提高低压涡轮的气动效率，增加气动负荷，进而改善低雷诺数条件下的发动机性能，降低耗油率，最终达到增加飞行器巡航时间的目的。

1.2 大涡模拟的历史与现状

同研究其他流体力学问题类似，实验研究、理论分析和数值模拟^[14]是深入认识低压涡轮叶片边界层流动机理的基本手段。在这三种方法中，实验研究出现的时间最早，通过流体实验，一方面，发现了不少流体力学的新现象新规律；另一方面，实验研究也提供了检验各种理论及数值模拟结果的客观标准。近年来，随着技术的进步，新的测试手段和方法不断涌现，实验流体力学已经发展到很高的水平，对复杂流动问题的测量能力大大增强^[15]。但是，实验研究也存在着一些明显的缺点，比如花费大、周期长、难以模拟真实极端环境等等；另外，目前看来，还没有实验方法能够全面记录全流场相关物理量随时间的演化信息，对近壁面流动细节的测量也存在着很大困难，而这些都是研究叶片边界层时空演化规律所必须的。

作为美国Clay数学研究所公布的七个“千禧数学难题”之一，Navier-Stokes方程(N-S方程)解的存在性与光滑性问题备受数学家的关注^[16]，但是，在可预见的将来，似乎还看不到解决这一世纪难题的可能性，这就给理论分析方法带来了巨大的困难。尽管如此，理论分析手段对流体力学问题的研究仍然发挥了非常重要的作用，例如，流动稳定性理论能够对转捩现象的初始阶段做出较好的预测，也能够解释实验中发现的某些典型的非线性现象^[17]；又如，统计理论大大促进了人们对湍流问题的认识^{[18][19]}。对于层流边界层分离现象，其线性发展阶段也可以用稳定性理论描述^{[20][21]}，但涡轮叶片边界层受到外部周期性尾迹的作用，这种条件下线性稳定性理论不再有效。

上世纪40年代，伴随着电子计算机的出现，计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)作为流体力学的一个新分支诞生了，CFD利用数值方法求解描述流体运动的Navier-Stokes方程组(包括其各种近似和简化形式)，以获得整个流场的离散解。在某种程度上，可以将CFD理解成虚拟的数值实验，但和真实的实验研究比较，数值方法费用低，周期短，通过改变边界条件就能模拟不同工况，甚至极端的物理环境；另外，能够记录全部流场信息也是数值方法的一大优势。当然，数值方法也存在一些明显的缺陷，其中最主要的就是计算精度问题，比如对雷诺平均方法，湍流模型大大影响了计算结果的准确性。

数值模拟方法能够迅速发展，成为研究流体力学问题的基本手段之一，很大程度上得益于计算机技术的快速进步，特别是计算机运算速度的不断提高和存储容量的不断增加，这一趋势从下面的例子很容易看出：1987年，Kim、Moin和Moser首次实现了槽道

湍流的直接数值模拟，槽道雷诺数 $Re_\tau = 180$ ，网格近 400 万 ($192 \times 129 \times 160$)，计算花费的 CPU 时间为 250 小时^[22]；到了近 20 年之后的 2006 年，Hoyas 和 Jiménez 对雷诺数 $Re_\tau = 2003$ 的槽道湍流进行了直接数值模拟，网格 179 亿 ($6144 \times 633 \times 4608$)，计算使用了 2048 个处理器，总的 CPU 时间 600 万小时 (~ 122 天)，计算产生的原始数据高达 25T 字节^[23]。图 3 是 2008 年 6 月全球超级计算机 500 强排行榜 (TOP500) 给出的超级计算机运算速度发展趋势图^[24]，从图中可以看出，截止 08 年年中，排名第一的超级计算机运算速度达到了惊人的 1,026 万亿次/秒；而排在第 500 位的系统，其运算速度也有 8.996 万亿次/秒。图中根据已有数据拟合的趋势线表明：超级计算机运算速度的增长规律，是基本符合摩尔定律的，在可预见的未来，计算机运算速度、存储容量将持续快速增长，这必将进一步促进数值模拟方法的发展。

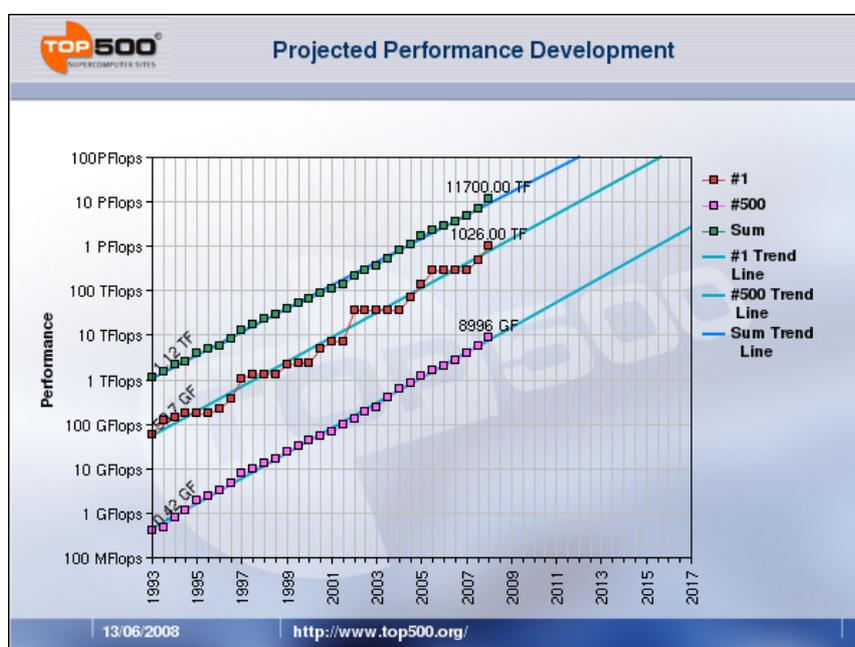


图 3 TOP500 超级计算机运算速度发展趋势^[24]

数值模拟方法具有上述种种优点，用来研究涡轮叶片边界层流动问题似乎是一个合理的选择；但另一方面，可供选用的数值方法多种多样，其计算精度、计算开销各不相同，对本文的问题，究竟采取哪种方法更为合理，还需要进一步的考察。

1.2.1 湍流数值模拟方法

对于湍流，虽然直到今天也缺乏一个获得广泛接受的准确定义^{[25][26]}，但它却具有一些公认的特征，如随机性、扩散性、三维有旋性、耗散性等等^[27]，此外，相干结构的发现表明湍流也是有序的^{[28][29][30]}，总的来说，可以认为湍流是随机性和有序性的结

合体^[31]。湍流是典型的时空多尺度现象，在高雷诺数条件下，具有很宽的时间和空间尺度，通常的观点认为^[32]，湍流是由大大小小不同尺度的旋涡组成的，最大的旋涡尺度和流动的特征尺度相当，最小的旋涡尺度则对应所谓的Kolmogorov尺度（耗散涡尺度）；在不同尺度的旋涡之间存在着能量级串现象（energy cascade），湍动能从大的含能涡通过无粘作用向较小的旋涡传递，较小的旋涡再传向更小的旋涡，这个过程持续进行到最小的耗散涡，在这个尺度上能量被粘性耗散作用转变为分子热；此外，在特殊条件下也有可能发生反向级串（backscatter）现象，即能量从小尺度向大尺度旋涡传递。

图4给出了高雷诺数下典型的湍能谱及能量级串现象示意图：在波数空间，流场中的大尺度旋涡对应低的波数，小尺度旋涡则对应高的波数。从图中容易看出，绝大部分的湍动能（80%以上^{[32][33]}）都位于低波数（大尺度旋涡）区域，通常将该尺度范围称为含能区（energy-containing range），含能区的湍流运动由惯性主宰，通过

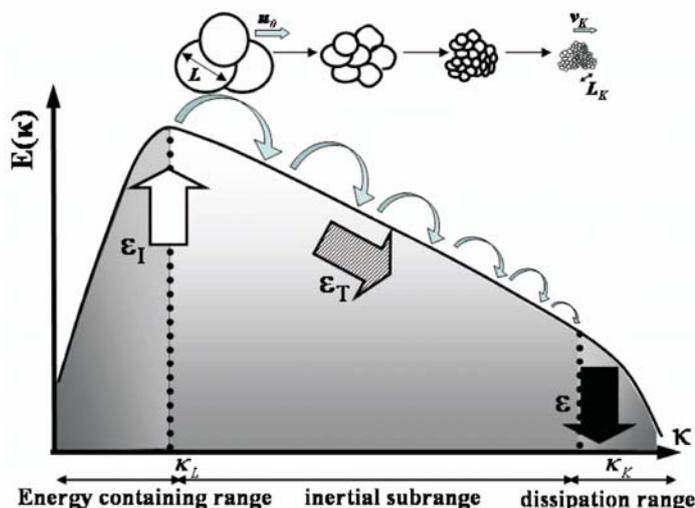


图4 典型的湍能谱及能量级串示意图（对数坐标）^[26]

无粘作用向小尺度传输能量，该区域的粘性效应几乎可以忽略；绝大部分湍动能的耗散都发生在最高波数（小尺度旋涡）区域，该区域内粘性效应占主导地位，湍动能通过粘性耗散转变为热能，通常把该尺度范围称为耗散区（dissipation range）；高雷诺数下，含能区和耗散区几乎完全分离，这两者之间的尺度范围（远离含能区和耗散区）被称为惯性子区（inertial subrange），该区域的运动仍然由无粘作用主宰，在充分发展湍流的惯性子区，湍能谱存在 $-5/3$ 幂次率，由于粘性效应可以忽略，能量以接近恒定的速率向高波数（小尺度）传递。总的来看，含能区拥有的包含在大尺度旋涡中的湍动能，被不断提取出来，通过惯性子区向小的尺度传输，最后到达耗散区，被小尺度旋涡的粘性作用耗散掉，由此形成了图中所示的能量级串图画。

正是由于湍流所具有的上述特性，导致模拟湍流的数值方法多种多样。在求解N-S方程的框架内，湍流数值模拟方法传统上被分为三类^[32]：雷诺平均（Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, RANS），大涡模拟（large-eddy simulation, LES）和直接数值

模拟 (direct numerical simulation, DNS)。近年来, 随着研究工作的不断深入, 将雷诺平均和大涡模拟结合在一起的hybrid RANS/LES方法 (简称hybrid方法) 受到越来越多的关注, 在工程应用方面取得了巨大的进步, 将其单独归为一类似乎更能反映这一发展趋势^{[26][33][34][35][36]}, 于是这里介绍四类方法: RANS, hybrid RANS/LES, LES和DNS。

1.2.1.1 直接数值模拟

Navier-Stokes方程本身是封闭的, 对于湍流问题, 如果不引入任何模型或假设, 直接数值求解该方程, 以获得流动的瞬态解, 这就是直接数值模拟方法。虽然DNS是最准确的数值模拟手段, 但湍流的时空多尺度特性使其面临巨大的挑战: 要直接模拟湍流, 就必须分辨所有尺度的运动, 湍流中最大、最小长度尺度之比与 $Re^{3/4}$ 成正比, 对于三维问题, 计算需要的网格数成正比于 $Re^{9/4}$; 计算还需要沿时间积分, 时间步长则由最小的时间尺度以及计算的稳定性共同决定^[37], 最后, 总的计算量与 Re^3 成正比; 以上估计是针对均匀湍流, 对于壁湍流或其他非均匀流动, 计算量甚至可能更大^{[32][33][38]}。由此容易看出, DNS对计算机的运算速度和存储容量提出了多高的要求。

DNS虽然计算量巨大, 但却具有很多优点^{[31][39]}: 首先, 由于直接求解N-S方程不需要引入任何模型或假设, 计算结果的精度在数值方法中是最高的; 其次, 计算可以提供全流场随时间演化的所有流动细节, 由此形成的数值数据库为流动机理的研究提供了最全面的信息; 第三, 数值数据库可以作为检验其他数值模拟结果的基准, 也为检验和发展新的湍流模型、亚格子模型等提供了基础数据; 此外, DNS还可以进行一些“虚拟的”数值实验, 研究单个参数对流动的影响, 甚至用于检验某些实验测量结果的精度。

DNS的应用是和计算机技术的发展紧密联系在一起的, 最早的DNS出现在1972年, Orszag和Patterson用 32^3 的网格, 对 $Re_\lambda = 35$ 的均匀各向同性湍流进行了计算^[40], 而第一个槽道湍流的DNS则出现在1987年^[22], 后来陆续出现了对平板湍流边界层、后台阶流动、边界层分离流等的模拟。在这一阶段, 主要工作集中在低雷诺数、简单几何形状的流动问题, 更多细节可见文献^{[31][41]}的评述。最近十年, 受益于计算机运算速度的提高及数值方法的成熟, DNS的应用呈现出一些新特点:

- 首先, 对某些“简单”流动问题, 计算的雷诺数越来越高, 如1.2节开始部分提到的槽道湍流, 雷诺数从 $Re_\tau = 180$ 提高到 $Re_\tau = 2003$, 又如对各向同性湍流的模拟, 从最初的 32^3 网格、 $Re_\lambda = 35$ 到目前的 4096^3 网格、 $Re_\lambda = 1201$ ^{[42][43]}, 这些工作的意义主要在于探索较高雷诺数条件下的湍流机理。
- 其次, 通过DNS, 某些复杂流动现象的机理研究工作取得重要进展: 比如,

Krishnan和Sandham对超音速边界层内湍流斑演化所进行的DNS, 深刻揭示了湍流斑合并、湍流斑/分离泡相互作用的基本规律^{[44][45][46]}; 又如, 通过对自由流湍流诱导旁路转捩现象的DNS, Zaki和Durbin发现, 只需要两个扰动涡模态而非全部模态即可触发旁路转捩^{[47][48][49]}。

- 第三, 对中等雷诺数下复杂工程流动问题的机理研究工作大量出现, 2001年, Wu和Durbin首次实现了对低压涡轮叶栅流动的DNS, 研究了上游周期性尾迹与叶栅流动的相互作用规律, 计算雷诺数为 1.48×10^5 , 网格数5700万^{[50][51]}; 随后, Wissink和Rodi等人采用类似方法对一系列不同流动条件下的低压涡轮叶栅流动问题进行了DNS, 详细分析了周期性尾迹与涡轮叶片边界层的相互作用规律^{[52][53][54][55][56][57]}; 此外, 对于压气机叶栅, Zaki等人也采用DNS研究了自由流湍流作用下的边界层转捩现象^[58]。

可以预见, 随着计算机运算速度的不断提高, DNS对于复杂工程流动问题的机理研究工作必将持续深入。但直接对工程流动问题实施DNS却缺少可行性, 一方面此类问题对计算机性能的要求过高, 在可预见的将来还很难达到这一目标; 另一方面, 即便计算机能够满足要求, DNS产生的海量瞬态数据也不是工程研究人员所需要的。在未来很长的一段时间内, DNS可能都会作为流动机理的研究工具存在。

1.2.1.2 雷诺平均

早在1895年, O. Reynolds便提出将湍流流场变量分解为平均量与脉动量之和, 并从N-S方程出发, 导出了湍流的平均运动方程, 这就是著名的雷诺方程。平均概念的提出, 具有重要的现实意义: 首先, 期望准确描述工程中复杂湍流的瞬态运动是不现实的(DNS除外), 湍流的随机性特点表明采用统计方法对湍流统计性能进行研究是解决工程流动问题的理想方法; 其次, 从应用角度看, 即便能够获得湍流的瞬态信息, 工程技术人员也会通过统计方法提取他们感兴趣的平均量^{[14][59]}。但另一方面, 平均概念的引入也带来了巨大的挑战: 由于N-S方程的非线性, 雷诺平均导致方程中出现脉动量的统计关联项(雷诺应力等), 未知量数目大于方程数目, 无法直接求解, 这就是经典的封闭问题。

要解决封闭问题, 就必须引入湍流模型, 通过建立高阶关联量与低阶关联量之间的关系来封闭方程组, 这是目前工程湍流计算中采用的基本方法。根据雷诺应力的确定方式, 湍流模型可以分为两大类^{[59][60]}: 一类是以Boussinesq涡粘性假设为基础的涡粘性模型, 包括零方程模型(如混合长模型、B-L模型)、一方程模型(如S-A模型)和两方程

模型（如 $k-\varepsilon$ 模型、 $k-\omega$ 模型）；另一类是雷诺应力模型，包括代数应力模型和雷诺应力输运方程模型。

从早期求解定常问题，到现在广泛用于非定常问题的求解（unsteady RANS, uRANS），雷诺平均方法在解决工程实际问题方面发挥了巨大的作用^{[61][62]}，但是受其自身的限制，RANS 也存在着一些重大的缺陷：比如，在进行平均运算时，对不同尺度的旋涡同等对待，不加区分，试图用同一个模型模拟所有尺度的效应；此外，平均运算也使包含在脉动运动中的大量有用信息丢失。由此导致各种湍流模型都缺少通用型，强烈依赖于经验参数，Bradshaw 曾就此指出^[63]：在原理上，是否存在“通用”的湍流模型，即是说该模型对所有流动的模拟都能达到工程可接受的精度，这一问题现在还没有答案；但可以肯定的是，目前还不存在这样的模型。

对于分离及转捩问题的预测，也是雷诺平均方法面临的挑战之一，由于分离和转捩现象本身的复杂性，要准确预估转捩/分离出现的位置及转捩/分离区的长度，存在极大的困难，直到现在，仍有研究者不断提出新的转捩模型^{[64][65][66][67]}，但计算结果往往难以尽如人意。显然，对于本文研究的涡轮叶片边界层精细流动问题，采用雷诺平均方法并不合适。

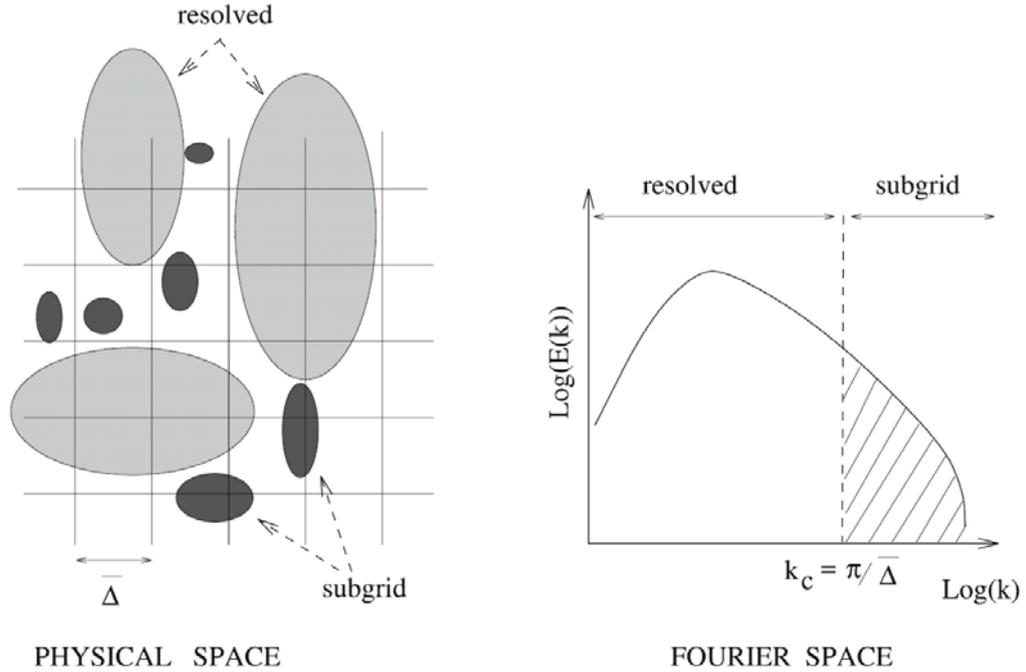
1.2.1.3 大涡模拟

从前述对直接数值模拟和雷诺平均方法的介绍可以知道，这两种方法均存在一定的缺陷：DNS 虽然能够获得流场准确的瞬态解，但计算量极其巨大，很难应用于较高雷诺数复杂流动问题的求解；RANS 的计算量尽管很小，但由于湍流模型依赖经验参数、缺少通用型，导致计算结果精度较低。作为 DNS 和 RANS 的折衷，大涡模拟方法部分消除了这两者的缺陷：其计算量远小于 DNS，计算精度又大大高于 RANS。

要阐明大涡模拟方法的基本思想，就必须从湍流本身的时空多尺度特征出发，根据 Kolmogorov (1941) 的局部各向同性假说，可以将湍流场中不同尺度的结构分为两类^[33]：第一类是含能区的大尺度结构，大尺度结构包含了绝大部分的湍动能（80%以上），刻画了流动的主要特征，是流场演化过程最重要的驱动因素，由于尺度大，大尺度结构易受边界条件影响，因而是各向异性的；第二类是惯性子区和耗散区的小尺度结构，与大尺度结构相反，小尺度结构只包含极少的湍动能，其主要作用在于能量的传输和耗散，根据局部各向同性假说，小尺度结构具有共同的特征，在统计上是各向同性的。正是由于湍流场中两类结构的不同特点导致了雷诺平均方法的失败，文献 [68] 就此指出：RANS 模拟了所有运动尺度的影响，到目前，没有模型能够不调整模型常数而对所有的流动都

给出准确的结果，这可能是由于大的含能涡更多的受到边界条件的影响，而要发展代表其动力学机制的通用模型几乎是不可能的。为了克服这一困难，在大涡模拟中，大尺度的三维非定常运动被直接求解，只有小尺度运动的效应被模化^[32]，这样做的好处在于：一方面，和大尺度运动比较，小尺度运动较少受到边界条件的影响，更加均匀和倾向于各向同性，因而也更有可能是服从通用的模型^[68]；另一方面，直接求解的大尺度运动包含了绝大部分的湍动能（80%以上^[32]），大尺度结构的演化能够刻画流动的主要特征，由此可以预期，LES的计算精度应远高于RANS。为了分辨大尺度结构，LES的网格密度远大于RANS，因而其计算量也和RANS存在数量级的差异，但和DNS比较，LES的计算量仍然很小，其原因在于：DNS需要分辨从含能涡到耗散涡的所有空间尺度，LES则只需要计算到惯性子区，但用于分辨耗散尺度的计算开销远远大于分辨惯性子区和含能区的开销^[32]。

虽然原则上可以将湍流场中不同尺度的结构分为两类，但在实际操作时却遇到了很大的困难：从含能区到耗散区，旋涡尺度的分布是连续而非离散的，不同尺度之间存在着强烈的非线性耦合，也就是说，期望分开处理的大尺度和小尺度结构之间并不存在明显的界限，于是，如何进行尺度分离（scale separation），便是大涡模拟首先需要解决的问题^{[26][37]}。如图5所示，LES中，通常采用在物理空间或波数空间进行低通滤波（low-pass filtering）的方法，将某一瞬态流场变量 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 分解为两部分之和： $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ ，其中 $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ 代表可分辨分量（resolved component，大尺度量）， $\phi'(\mathbf{x}, t)$ 代表未分辨分量（unresolved component，小尺度量），显然，根据大小尺度分类的原则，谱空间的截断波数应该位于惯性子区。将低通滤波算子作用于N-S方程，并运用等式 $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ ，就可以得到以 $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ 为变量的大涡模拟控制方程，由于N-S方程的非线性，滤波后的方程中会出现表征大小尺度相互作用的未知项，这就是亚格子（subgrid-scale, SGS）应力项。同RANS中运用湍流模型封闭雷诺应力类似，LES中也需要建立适当的模型（亚格子模型）来封闭亚格子应力，显而易见，亚格子模型的好坏对于LES计算结果的精度有着很大的影响。如前所述，亚格子应力表征了通过滤波实现分离的大小尺度间的相互作用，理想情况下，如果亚格子模型能够完全模拟这种相互作用，那就能够实现最高精度的LES；但实际上，这种理想的亚格子模型并不存在，我们只能期望SGS模型能够尽量准确的模拟大小尺度间的主要作用，例如，由于谱空间的截断波数位于惯性子区，能否较好的模拟能量级串现象便成为评价SGS模型精度的重要标准。

图5 物理空间及谱空间的尺度分离示意图^[37]

同DNS类似，求解大涡模拟控制方程所获得的也是三维非定常瞬态流场，二者的主要差别在于：DNS具有足够的时空分辨率，解析了湍流场中所有的流动结构，而LES的时空分辨率较低，只对包含绝大部分湍动能的大尺度结构直接求解，小尺度结构的影响则通过亚格子模型来模拟。在很多情况下，大尺度结构主导了流场的演化^[69]，对这类问题，如果亚格子模型足够准确，LES的结果显然能够刻画流动的主要特征，也就是说，LES可以用于这类问题的机理研究，例如，对于低雷诺数下的层流分离泡现象，其转捩过程主要受大尺度结构控制，所以LES能够较好的模拟这一问题。

接下来比较uRANS和LES：这两种方法都能够得到非定常的流场解，其控制方程中分别存在雷诺应力和亚格子应力项，需要使用湍流模型或亚格子模型进行封闭，因而具有一定的相似性。但实际上，uRANS和LES存在明显的区别：第一，RANS方法涉及平均的概念，对于定常的RANS，采用系综平均（ensemble averaging）定义最具通用性，如果湍流模型足够准确，求解定常RANS得到的就是瞬态流场的统计平均结果，在满足各态历经假说（ergodic hypothesis）的条件下，可以采用时间平均或空间平均代替系综平均；对于uRANS，系综平均仍是最具通用性的定义，实际应用中，如果平均场演化的时间尺度远远大于湍流脉动的时间尺度，则采用时间平均较为方便，此外，如果流动存在典型的周期性（如叶轮机中的转静干涉现象），那么采用相位平均（phase averaging）或条件系综平均（conditional ensemble averaging）的定义最为合理，也就是说，求解

uRANS得到的均是对特定相位瞬态流场进行统计平均的结果,而不同相位下统计结果的差异则是uRANS非定常性的来源^{[26][59]}。第二,LES方法涉及滤波的概念,滤波的作用在于进行尺度分离,大尺度直接求解,小尺度进行模化,计算得到的是非定常瞬态流场,对这些瞬态流场进行恰当的平均操作,才可能得到定常或非定常的RANS结果。总的来说,LES和uRANS最大的区别就在于,求解LES获得的是包含大尺度结构的瞬态流场,求解uRANS得到的则是某种意义下的统计平均场。

LES的计算量虽然远小于DNS,但是对于高雷诺数的工程流动问题,目前的计算机仍然没有能力处理^{[26][68]},这主要是由于高雷诺数下的近壁湍流边界层对计算网格要求过高所致:湍流边界层中,外区的大尺度结构与边界层厚度同一量级,但在边界层内区,对动量输运起主要作用的条带(streaks)结构,其特征尺度却以壁面粘性长度(viscous lengthscale)为单位^{[32][33][68][69]},内外区的不同特点导致其对计算网格的需求存在很大差别,Chapman的估计表明,如果要分辨外区、内区的流动结构,LES所需的网格数分别与 $Re^{0.4}$ 和 $Re^{1.8}$ 成正比^[70],而总的计算开销差异更大,分别与 $Re^{0.5}$ 和 $Re^{2.4}$ 成正比^[68]。对于高雷诺数流动问题,LES如此高的网格需求在目前条件下显然还无法满足,变通的方法有两种:其一是发展LES的近壁模型,由于边界层内区所需的计算量远远大于外区,可以考虑对外区直接求解,而在内区则通过近似的模型模化,避免直接计算^[68];其二便是将要在下面讲到的hybrid RANS/LES方法。

1.2.1.4 Hybrid RANS/LES

正如大涡模拟是雷诺平均和直接数值模拟两种方法妥协的产物,hybrid RANS/LES也可以看做是对RANS和LES二者的折衷。如前所述,LES的计算量虽然远小于DNS,但分辨湍流边界层的巨大网格需求使得目前阶段的LES仍然无法处理高雷诺数的工程流动问题,Spalart曾做出估计,对于飞机机翼绕流或类似问题(雷诺数 7×10^7),即便拥有成熟壁面模型可供使用,完全的LES也需要等到2045年才能实现^[71];另一方面,虽然近年来非定常的RANS方法在工程领域获得了广泛的应用,但受湍流模型限制,uRANS在预测大规模分离流动方面仍存在极大的困难,而随着技术的进步,工程中对准确预测此类问题的需求却越来越迫切^{[26][33]}。Hybrid RANS/LES是一种将统计平均(RANS部分)和滤波操作(LES部分)混合在一起的多分辨(multiresolution)方法^[26],其主要思想在于:对计算域中雷诺平均方法能够比较准确预测的部分采用RANS,由此减少计算开销;而对剩余的雷诺平均难以处理的部分则采用LES,用于提高计算精度。总的来说,作为一种偏工程化的方法,hybrid RANS/LES在保持大涡模拟优点的同时消除了高雷诺数条

件的限制，大大加快了LES在工程流动问题中的应用步伐。

最早关于hybrid RANS/LES方法的论文出现在 1975 年，Schumann发展了一个壁面模型作为近壁区亚格子模型的补充^[72]，但此后的 20 余年间，这一研究方向并未受到多少关注；直到上个世纪末，Speziale^[73]和Spalart等^[71]的工作才导致了该方法在工程应用领域的突破。此后短短十年时间，从湍流模型专家、CFD程序开发人员到CFD应用工程师，hybrid方法受到各方关注，新的模型与应用不断涌现^[26]，究其原因，主要可以归结为下面三点：首先，和uRANS比较，hybrid方法在预测高雷诺数大分离流动方面具有明显优势，而其计算开销又远小于LES，目前的计算机有能力处理；其次，工程应用领域的强劲需求（如准确计算系统的动态气动负荷及非设计状态性能、噪音的预测与控制等）促进了该方法的迅速发展；第三，由于目前大多数的hybrid模型都是通过修正uRANS模型得到的，适当修改已有的uRANS代码就可以实现hybrid计算，这在一定程度上加速了该方法的应用进程。

由于hybrid方法发展历史较短，新的模型又不断涌现，不同文献对其分类的标准也不尽相同^{[26][33][37]}，这里根据文献 [26]的定义将其分为两个大类：第一类称为全局hybrid方法（global hybrid RANS/LES），全局方法在整个计算域中依赖于同一族模型方程，对RANS/LES的界面进行连续处理，即不在界面上重构湍流脉动，因而也被称为弱耦合方法（weak RANS/LES coupling）。这类方法中，最常见的又分两种，分别是分离涡模拟（或称脱体涡模拟，detached-eddy simulation, DES）^{[71][74][75][76]}以及显示混合方法（explicit blending method）^{[77][78]}，其中分离涡模拟在目前阶段获得了最为广泛的应用。由于求解RANS和LES分别得到平均及瞬态流场，但全局方法却在两者的界面上对流场变量实行连续处理，这导致了原理上的缺陷，因此这类方法多适用于一些对RANS/LES界面湍流脉动不敏感的流动问题，如剪切层失稳导致的大规模分离等。第二类称为分区hybrid方法（zonal hybrid RANS/LES），分区方法对RANS/LES的界面实行间断处理，意即需要在界面重构湍流脉动，因此也被称为强耦合方法（strong RANS/LES coupling），显然，这类方法克服了全局方法在原理上的缺陷，但如何重构界面的湍流脉动却是其必须解决的问题。

对于本文研究的涡轮叶片边界层流动问题，hybrid RANS/LES 方法并不适合，一方面，该方法主要用于高雷诺数流动问题，而本文针对的却是低雷诺数条件；另一方面，即便使用 hybrid，由于该方法多数情况下对整个边界层都采用 RANS 处理，从中也无法获得本文工作所需要的边界层时空演化信息。

1.2.1.5 小结

上文各小节分别对 RANS, hybrid RANS/LES, LES 和 DNS 这四种主要的湍流数值模拟方法进行了介绍, 这里再将 RANS 细分为定常和非定常两类 (以下分别简称 RANS 和 uRANS), 然后对这五种方法做一个简单的总结:

首先, 五种方法中, 只有 RANS 得到定常结果, 其他方法得到的都是非定常结果, 这里面 uRANS 的非定常流场是某种意义下的统计平均场, 而 LES 和 DNS 的结果则均是瞬态流场, hybrid 方法中 LES 部分得到的也是瞬态流场, 对这些瞬态流场样本进行统计分析, 可以获得诸如雷诺应力的高阶统计量, 但这一点对 uRANS 部分的流场却并不成立。

其次, 按照 RANS、uRANS、hybrid RANS/LES、LES、DNS 的顺序排列, 五种方法的计算精度不断提高, 从计算中获得的流场信息也持续增加, 但计算量的增长速度则更为惊人: 通常可以认为, 对于典型的高雷诺数流动问题, 从前一种方法过渡到后一种方法, 计算量会增加一个甚至多个数量级。

第三, 五种方法中, DNS 不包含任何模型假设, 计算量最大, 计算精度也最高, 其他方法由于包含雷诺应力或亚格子应力模型, 计算准确度受到模型精度的影响, 但大涡模拟和雷诺平均方法的渐进特性是不同的^[34]: 对于 LES, 在网格加密条件下, 越来越多的流动细节被直接求解, 计算结果和 DNS 的差异逐渐减小, 极限情况下 LES 可以得到和 DNS 一致的结果, 此时亚格子模型不再发挥作用; 对于 RANS 和 uRANS, 情况则很不一样, 网格不断加密可以获得网格无关的流场解, 但不会因此改善湍流模型自身存在的精度问题, 更不可能在极限情况下获得和 DNS 一致的结果。Hybrid 方法则介于二者之间, 其 LES 部分在网格加密条件下能获得更多的流场信息, RANS 部分则只是得到网格无关的流场解。

本文期望通过数值模拟方法对低雷诺数条件下的涡轮叶片边界层流动机理进行研究, 上面对各种方法的介绍表明, 四种候选方案中, LES 或 DNS 较为合适, 在不考虑计算量的前提下, 采用 DNS 显然最为理想, 虽然本文研究的问题雷诺数较低 (5×10^4 量级), 但已有的经验表明, 对这一量级雷诺数的问题进行 DNS, 所需要的网格点数可能接近千万, 以我们目前所拥有的计算资源还难以满足这一要求, 于是 LES 便成为唯一合理的选择。但是, 低雷诺数条件下的涡轮叶片边界层存在分离、转捩等复杂流动现象, LES 是否能够准确的模拟这些现象是必须提前确认的问题, 作者将在 1.4.4 对此进行讨论。

1.2.2 大涡模拟的发展历程

大涡模拟方法的研究历史可以追溯到上世纪 60 年代, 早期的大多数开拓性工作都来源于气象相关应用的驱动, 直到今天, 大气边界层仍是大涡模拟的一个研究热点^{[32][79]}。1963 年, 气象学家 Smagorinsky 首先提出了后来以他的名字命名的涡粘性亚格子模型^[80] (Smagorinsky 模型), 用于研究全球天气预报问题, 虽然这一模型由于耗散过大, 在预测大尺度大气或海洋流动方面并不成功, 但却在工业应用领域获得了广泛的使用^[79]。另一位气象学家 Lilly, 也是 Smagorinsky 的合作者, 根据 Kolmogorov 常数计算了该模型中 Smagorinsky 系数的取值^[81]。1970 年, 气象学家 Deardorff 首次把大涡模拟用于有工程意义的槽道湍流模拟中^[82], 为这一方法奠定了基础。从 1973 年起, Stanford 大学的 Reynolds 和 Ferziger 领导的集体开始对大涡模拟做深入系统的研究, 他们从计算最简单的均匀各向同性湍流开始, 由简到繁, 逐步深入, 意在给大涡模拟方法建立健全的基础^{[83][84]}。同一时期, 理论物理学家 Kraichnan 在 1976 年提出了谱涡粘性 (spectral eddy viscosity) 的概念^[85], Lesieur 及其合作者在此基础上发展了谱空间的大涡模拟方法, 他们首次实现了衰减的三维各向同性湍流的模拟, 后来, 又率先完成了各向同性湍流中被动标量衰减的大涡模拟^[79]。

进入 80 年代后, 随着研究工作的深入, 一方面, 出现了一些新的亚格子模型, 如 Bardina 等人^[86]提出的尺度相似模型 (scale-similarity model) 和混合模型 (mixed model), Kiyosi^[87]提出的一方程输运模型等; 另一方面, 由大涡模拟生成的数值数据库也被用于某些流动机理的研究, 例如, Moin 和 Kim 采用拟谱方法, 对槽道湍流进行了大涡模拟^[88], 计算产生的数据库被用来研究湍流的近壁结构^{[89][90]}。整个 80 年代, 大涡模拟的主要工作都集中在诸如均匀各向同性湍流、自由剪切流、槽道湍流等几种简单流动^[91]。1987 年, 随着 Kim 等人对槽道湍流直接数值模拟结果的发表^[22], LES 可以通过与 DNS 结果对照来进行分析; Piomelli 对近壁转捩问题进行了大涡模拟^[92], 发现转捩过程中的亚格子耗散与充分发展湍流有显著差别, 标准的 Smagorinsky 模型耗散太大; 后来 Piomelli 又研究了均匀各向同性湍流和转捩流动中的能量反向级串现象^[93], 发现该现象在这些流动中大量存在, 但通常的亚格子模型却是绝对耗散的。从这些研究结果当中, 人们逐渐认识到标准 Smagorinsky 模型存在的一些缺陷: Smagorinsky 模型本身是纯耗散的, 模型中的经验系数决定了耗散的大小, 在某些情况下, 如湍流边界层的近壁区以及层流到湍流的过渡区域, 该模型表现出来的耗散过大。为了解决这些问题, 对于近壁流动, 需要在模型中加入一个经验的衰减函数来近似表征亚格子应力的渐进特性, 对于转捩流动, 则

需要引入恰当的转捩模型用以模拟转捩过程的间歇性。显然，过多的经验参数降低了大涡模拟的预测精度，也限制了大涡模拟的应用范围，模型问题似乎已成为制约大涡模拟向前发展的最大障碍。

1991年，Germano等人^[94]提出了著名的动力模型（dynamic model），解决了上述难题，大涡模拟向工程应用方向迈出了关键的一步，甚至可以认为，这是LES发展历史上的一个里程碑。动力模型的基本思想来源于高雷诺数湍流在惯性子区的尺度不变性（scale-invariance property）^[95]，通过对N-S方程进行两次不同尺度的滤波操作，得到两个尺度上的亚格子应力，由于尺度不变性，假设它们的模型系数不变，根据Germano等式^[96]，可以得到关于模型系数的方程，这样，模型系数的取值就不再由经验给定，而是根据流场的实际情况“动态”计算出来。需要注意的是，动力模型本身并不提出新的模型，它必须依赖于一个基准模型，然后用动力学的途径（dynamic procedure）动态计算基准模型中的系数。动力模型的好处在于，它消除了亚格子模型中经验参数取值的任意性，根据流场自身的局部特征动态计算模型系数，实践表明，动力模型可以正确给出近壁处亚格子应力的渐进特性，由于模型系数在层流区域自动取零值，可以预期，动力模型有希望能够较好的计算流动中的转捩或逆转捩现象。随后，Lilly^[97]对动力模型进行改进，解决了计算中存在的稳定性问题；Zang等人^[98]提出以混合模型作为基准的动力混合模型，得到了比动力涡粘模型更好的计算结果。前述动力模型都要求所计算的流动问题存在一个或多个统计均匀方向，以便在计算模型系数的过程中沿这些方向进行平均，Ghosal等人^[99]和Piomelli等人^[100]提出的局部化动力模型（localized dynamic model），以及后来Meneveau等^[101]提出的拉格朗日型动力模型解决了这一问题，使动力模型的应用范围进一步扩大（不存在统计均匀方向的流动）。同一时期，Lesieur等人^[102]将谱涡粘性模型应用到物理空间，发展了所谓的结构-函数模型（structure-function model），关于该模型的介绍及相关应用可以参见文献[103]。

需要特别指出的是，成立于1987年，由Stanford大学和NASA Ames研究中心共同运作的湍流研究中心（Center for Turbulence Research, CTR）在这一阶段的工作中发挥了最为重要的作用，包括前述动力模型在内的一系列开创性研究几乎都是在CTR完成的。90年代中后期，以CTR为代表的研究机构从最基本的问题出发，为大涡模拟方法的发展及工程化应用奠定了坚实的基础，如Ghosal和Moin^[104]率先推导了复杂几何域下的大涡模拟控制方程，Ghosal^[105]、Kravchenko和Moin^[106]对大涡模拟中数值误差的分析，Vasilyev等人^[107]设计的复杂几何域下的可交换滤波器，Jordan^[108]推导的曲线坐标系下的大涡模

拟控制方程等等。在这些工作的影响下，大涡模拟方法不断成熟，加上计算机运算速度和存储容量的快速增长，其应用早已不再局限于槽道等简单流动，如CTR率先开展了对翼型、非对称扩压器、同轴喷流燃烧室等的模拟^[109]；到本世纪初，这种情况更进一步，CTR已经有能力对搅拌混合器、车辆、叶尖泄漏、真实发动机燃烧室等完全工程化的流动问题进行模拟^[110]。

上面介绍的内容，都是针对不可压流动，对于可压流，除了动量方程中的亚格子应力项需要模化以外，增加的能量方程中也出现了不封闭项，必须单独处理，显然，对可压流实施大涡模拟的难度要远大于不可压流。大体上，从上世纪 80 年代中期开始，才陆续出现了关于可压缩流动大涡模拟的研究工作，1986 年，Yoshizawa^[111]根据统计理论，首先提出了一个针对可压流的Smagorinsky型亚格子模型；Speziale等人^[112]从理论和计算两方面对Yoshizawa的模型进行了检验，发现该模型只在小密度脉动极限下有效，他们采用Favre滤波（质量加权滤波）的亚格子模型，消除了这一限制条件；1991 年，就在Germano等人^[94]提出动力模型后不久，Moin等^[113]迅速将动力模型推广到可压缩流动，对各向同性湍流的模拟取得了很好的结果；1992 年，Erlebacher等人^[114]将混合模型也推广到了可压缩流动，而动力混合模型则是到 1995 年才由Vreman等人^[115]应用到可压缩混合层的模拟中。对比不可压流和可压流大涡模拟的研究历史容易发现，二者的发展历程具有相似性，但由于可压流LES的难度更大，其演化史在时间上较不可压流更晚。整个 90 年代，可压流大涡模拟的主要工作都集中在发展和验证亚格子模型方面，其研究对象也多是各向同性湍流、平面混合层等简单流动，直到 1999 年左右，Piomelli等人^{[116][117]}才对可压缩LES的控制方程进行了较为完整的总结。

1.2.3 大涡模拟的研究现状

最近十年，特别是进入新世纪以来，与大涡模拟相关的研究工作快速增长，新的模型与应用不断涌现，LES 呈现出加速发展的趋势，归结起来，这首先得益于前期以 CTR 为代表的研究机构所完成的大量奠基性工作；其次，工业界对准确预测某些复杂流动现象的迫切需求也是重要的驱动因素；最后，计算机运算速度与存储容量的快速增长、并行计算技术的逐步普及也为 LES 的广泛应用提供了基础性的保障。

对于不可压流的大涡模拟，由于其出现时间最早，相关研究进行的最为充分，因此在目前阶段，无论是亚格子模型还是相关的数值求解方法都发展的较为成熟，研究者已经有能力对具有复杂几何/物理边界条件的流动问题进行处理；目前其面临的最大困难仍是缺乏足够的计算资源处理高雷诺数流动。对于可压缩流动，情况则复杂的多，相比不

可压湍流的研究工作，可压缩湍流研究难度更大、缺乏相关理论，由此导致可压流 LES 出现的时间较晚、发展不成熟，其应用面临着诸多挑战：首先，大多数可压流 LES 的亚格子模型都是通过与相关的不可压模型类比得到的，其有效性有待更多研究工作的检验；其次，相比亚格子模型，更大的困难来源于数值求解方法，为了保证数值计算的稳定性，在对控制方程的对流项离散时需要加入人工粘性（对于中心格式）或者采用迎风型格式（引入数值/格式粘性），人工粘性或数值粘性的存在，会影响甚至“淹没”亚格子模型的作用，在流场中包含诸如激波等强间断的情况下更是如此，而这显然不是我们所期望的；此外，边界条件的处理也是可压缩 LES 的一大难点，如何提供真实的入口边条、如何减少边界反射对计算结果的影响，这些都是亟待解决的问题。总之，除了和不可压流同样面临高雷诺数的难题以外，可压缩流动的大涡模拟还需面对诸如亚格子模型、数值离散格式、边界条件等各方面的挑战。

针对大涡模拟目前阶段面临的主要问题，本节首先介绍了 LES 发展过程中形成的两种不同的研究观点；接下来对近年来新出现的一些亚格子模型以及实施大涡模拟的新方法进行了介绍；为了应对高雷诺数和高马赫数流动的挑战，第三部分列举了目前已有的处理这类问题的方法；最后部分则给出了一些应用大涡模拟进行机理研究或者处理工程实际流动问题的例子。

1.2.3.1 两种不同的研究观点

从前述大涡模拟的发展历史来看，通常的观点认为，亚格子模型是一个真实的物理模型^[118]：由 N-S 方程出发，通过滤波（滤波尺度 Δ ）实现大小尺度的分离，大小尺度间的相互作用则由亚格子模型显式表达，由此我们获得了封闭的大涡模拟控制方程组，在这一阶段，模型误差是唯一的误差来源。接下来，为了数值求解封闭的控制方程组，需要在计算域生成网格（网格间距 h ），然后使用恰当的空间/时间离散格式对方程组进行离散和求解，这一过程则会引入不同来源的数值误差^{[105][106][119]}。“正统”的大涡模拟方法认为：为了使亚格子模型发挥作用，离散过程中的数值误差至少应该比亚格子应力项小一个量级，以免过大的数值误差“淹没”了亚格子模型的效应。由此我们引入大涡模拟研究中的第一种观点，即所谓物理的 LES（physical LES）^[69]，或者称为严格的 LES（rigorous LES）^[120]、学术的 LES（academic LES）^[121]。物理的 LES 期望在计算中发挥亚格子模型自身的作用而尽量避免数值误差的影响，以此实现对流动问题的精确模拟。要达到这一目标，需要细致关注所有方面的问题，LES 求解过程中的每个部分，从滤波操作、亚格子模型到离散格式，都必须给予明确的考虑^[120]。可供使用的措施包括：采

用大的滤波器宽度, $\Delta/h=2$ 甚至更大; 采用先进的亚格子模型, 如动力涡粘模型、动力混合模型等; 采用具有小的频散/耗散误差的高阶离散格式, 如高阶有限差分、高阶紧致差分甚至谱方法。这类大涡模拟方法的优点在于, 能够评估和控制求解过程中每个部分对计算结果的影响, 但同时它也存在计算开销大、求解过程复杂等缺点。

虽然在原则上, 推导和封闭大涡模拟的控制方程组与数值求解该方程组是两个完全独立的过程, 但在实际应用中, 真正严格满足“物理的LES”的情况很少出现, 这两个过程往往交织在一起。最明显的一个例子便是关于计算中滤波器宽度 Δ 的选择, 有关LES数值误差的研究工作表明^{[105][119]}, 为了保证计算中的亚格子应力远大于数值误差, 应该选择较大的滤波器宽度, 例如^[119], 如果采用六阶紧致中心格式离散, Δ/h 应该取 2, 而如果采用二阶中心格式, Δ/h 至少要等于 4。但在实际工作中, 采用大滤波器宽度的情况很少出现, 几乎所有的计算都将网格间距默认为滤波尺度 ($\Delta/h=1$, 网格滤波或隐式滤波), 一方面, 这是由于大的 Δ/h 将导致计算量迅速增加 (Δ 保持固定, 如果 h 减半, 则计算量增大 16 倍^{[37][69]}); 另外, h 固定的条件下, 大的 Δ 在减小数值误差的同时却使计算能分辨的尺度范围变窄, 实践表明, 其最后结果往往并不优于网格滤波^[37]。

由此可见, 虽然物理的LES概念清晰, 物理含义明确, 但在实际应用中, 亚格子模型与数值误差的影响往往结合在一起, 难以做出明确的区分。基于此种现实, 在大涡模拟方法的发展过程中, 有一些研究者不再严格区分亚格子模型与数值误差的效应, 甚至完全放弃显示的亚格子模型, 而只通过适当的数值手段来模拟大小尺度间的相互作用。于是出现了大涡模拟研究中的第二种观点, 即所谓数值的LES (numerical LES)^[69], 或者称为实用的LES (practical LES)^[120]、工程的LES (industrial LES)^[121]。显然, 和物理的LES完全相反, 数值的LES采用了一种实用主义的哲学, 期望在较少关注求解细节的条件下获得合理的计算结果。这类方法的发展, 很大程度上得益于工程研究人员将RANS代码应用到大涡模拟中的实践, RANS求解器通常采用具有二阶精度的迎风型格式, 其数值耗散往往与亚格子应力项具有相同的量级, 在这种情况下, 显然没有必要过多的关注亚格子模型。对于某些经过挑选的数值格式, 本身的数值耗散就可以较好的模拟大小尺度间的相互作用, 如果加入显示的亚格子模型, 反而容易导致计算中耗散过大, 这时, 不考虑亚格子模型是较为合理的选择。数值的LES虽然使大涡模拟的应用更为简单, 但如果期望获得理想的计算结果, 显然更多的依赖于经验。

总的来说, 无论物理的LES、数值的LES还是二者的结合, 都是有效的大涡模拟方法^[69], 目前还没有能力对这些方法的优劣做出确定的评判。但是, 针对特定的流动问

题，在选择具体的方法时，还是有一些原则可以遵循的：通常来说，物理的LES具有明确的物理含义，求解过程清晰，较多的应用于流动机理研究；工程的LES更多的依赖于经验，计算结果的不确定性较大，通常应用于工程实际流动问题。本文的研究工作主要涉及低压涡轮的流动机理，使用偏向物理的LES显然是更为合理的选择。

1.2.3.2 大涡模拟中的新方法和新模型

在所有非“正统”的大涡模拟方法中，出现时间最早，应用最为广泛的就是所谓的隐式大涡模拟（implicit large-eddy simulation, ILES），大体上，可以将它归入数值的LES这一类别。按照文献 [37] 的观点，ILES方法都隐含着这样的假设，即亚格子尺度对可分辨尺度的效应等价于一种严格的耗散作用，在这一前提下，如果数值粘性可以恰当的代表这种耗散，那么计算中就不再需要显示的亚格子模型，这就是ILES方法的基本思想。隐式大涡模拟中引入的数值耗散，既可以来源于对流项的离散格式（迎风格式的数值粘性或中心格式的人工粘性），也可以通过显式或隐式的低通滤波实现，毫无疑问，采用迎风格式离散对流项是最常见的做法。

1992年，Boris等人^[122]提出使用FCT格式（flux-corrected transport）自身的耗散代替显式的亚格子模型进行大涡模拟，他们将这一方法称为MILES（monotone integrated LES），这是最早出现的一类ILES方法。事实上，MILES并不局限于FCT格式，按照文献 [123] 的定义，所有使用保单调（monotonicity-preserving）格式的隐式大涡模拟方法都被称为MILES，比如，Yan等人^[124]对超音速平板边界层模拟所采用的就是二阶精度的Godunov格式。MILES概念出现以后，以Grinstein为代表的研究者采用这一方法进行了大量的研究工作，初期他们的主要研究对象为亚音速的自由射流^{[125][126][127][128][129]}，后来，他们又对MILES方法进行了一些理论方面的分析，研究对象也扩展到槽道等壁湍流^{[130][131][132][133]}。由于使用的数值方法健壮性好，MILES可以用来处理复杂的高雷诺数流动问题，但过多的依赖于经验仍是它最大的缺点，总的来说，这是一类正在发展的方法，关于MILES的更多细节及相关应用，可以参考文献 [123][134]。

对比MILES，最近发展起来的另一类隐式大涡模拟方法则通过低通滤波引入适当的数值耗散，虽然同属于ILES，但它却具有完全不同于MILES的特点。1998年，Gaitonde和Visbal^[135]将一些高精度的数值方法应用到可压缩N-S方程求解器FDL3DI中，其主要特点如下：空间离散采用最高具有六阶精度的紧致中心格式，时间离散为二阶隐式或四阶显示格式，为了保证计算的稳定性，还采用最高达十阶精度的隐式滤波器对流场变量进行滤波；Visbal和Gaitonde^{[136][137][138]}进行了一系列的验证工作，用以校验这些数值方法

的有效性；后来，FDL3DI还从最初的向量版本发展为能并行处理多块搭接网格的新版本^[139]。Visbal等人将FDL3DI用于各向同性湍流、槽道湍流、超音速压缩角、超音速凹槽流、圆柱绕流等问题的大涡模拟^{[140][141][142][143][144]}，在这些计算中，他们测试了使用涡粘模型、动力模型以及不使用模型几种情况，对计算结果的比较表明：某些情况下，采用动力模型可以获得最好的结果，但多数情形这三者的差异不大，甚至某些时候，使用亚格子模型反而导致过大的耗散。针对这种情况，Visbal等建议通过高阶滤波器实现隐式大涡模拟而不再使用显式的亚格子模型^[145]，在此基础上他们完成了对三角翼、壁面凸包、低压涡轮叶栅等复杂流动的模拟，取得了很好的计算结果^{[146][147][148][149]}。

Visbal等的隐式滤波方案显然不同于前述MILES方法，与MILES通常使用低阶格式相比，Visbal方案中的空间离散采用无耗散的高阶紧致中心格式（最高六阶），计算过程中，无耗散的中心格式可能引入非物理的数值振荡，此外，计算网格不能分辨所有的湍流尺度也会造成能量在高波数区域的堆积，这些都会导致计算的不稳定，通过使用高阶对称隐式滤波器（最高十阶）对流场变量滤波，解决了这一问题，其好处在于，滤波器参数的调整可以保证滤波算子在消除“ $2-\Delta$ ”振荡的同时几乎不影响流场中的大尺度结构。从Visbal方案使用的算例及计算结果来看，这类方法计算量较大，计算精度高，适用于机理研究而非工程计算，最近，采用和Visbal方案类似的方法，Matsuura和Kato研究了有/无来流湍流度下的低压涡轮叶栅流动^[150]，Kawai和Fujii则对自由流湍流诱导旁路转捩现象进行了模拟^[151]，都取得了很好的结果，这些工作也从侧面说明了Visbal方案的有效性。

除了Visbal等提出的隐式滤波方案，从2004年开始，Bogey和Bailly等人^{[152][153]}发展了一类采用显式滤波的ILES，用于流动及声学的计算，在他们的方案中，空间/时间离散和滤波都是显式进行的，但和一般的显式格式不同，这里的格式均在波数空间进行了优化，其原则为保证在波数低于 $k\Delta x = \pi/2$ 的范围内格式的频散和耗散误差最小。Bogey和Bailly等采用这一方案对圆射流进行了模拟，他们发现，如果在计算中添加显式的亚格子模型，会降低流动的有效雷诺数（effective Reynolds number），单纯使用滤波则可以获得最佳的结果^{[154][155]}，于是，在后来的研究工作中，显式的亚格子模型不再被使用，而只通过滤波保证计算的稳定性^{[156][157][158]}。最近，这类方法又被推广到一般的广义曲线坐标系，用于对复杂流动流场和声场的同时模拟^{[159][160]}。对比Visbal等的隐式滤波方案和这里的显式方案，可以发现，虽然所采用的具体数值方法不同，但这两者却具有很多相似性，显式方案也适合于机理研究，特别是声学相关问题的模拟。

除了上述的隐式大涡模拟，近年来还有一种被称为近似去卷积模型（*approximate deconvolution model*, ADM）的方法受到了较多的关注^{[26][37]}。去卷积操作，有时又被称为反滤波（*defiltering*）操作，是期望从滤波后的流场出发，通过反转滤波算子实现对未滤波流场的重构。1999年，受到Geurts^[161]工作的启发，Stolz和Adams^[162]提出了ADM模型，最初的方法针对不可压流动，被用于槽道流的模拟^[163]；很快，该模型被推广到可压缩流动^{[164][165][166]}；而随后对转捩问题^{[167][168]}、射流声场^[169]等的成功模拟证明了ADM方法具有广泛的适用性。但ADM最吸引人的特点之一在于其可以较好的处理激波等流场中的强间断^{[164][170][171][172]}，如文献^{[164][171][172]}对超音速压缩角的模拟都取得了很好的结果，这在可压缩流动的大涡模拟方法中是不多见的。

最近几年，在“物理的LES”范畴内，亚格子模型也有了新的发展，比如，文献^{[173][174][175]}提出了一个适用于复杂几何流动模拟的动力模型，文献^[176]对局部化动力模型的改进，等等。特别值得指出的是，国内学者近年来也在发展新的亚格子模型方面完成了一些极富原创性的工作，2004年，崔桂香等人^{[177][178][179]}在假设可分辨尺度湍流也具有局部各向同性的前提下，从大涡模拟的基本方程出发导出了大涡的Kolmogorov方程，再据此得到亚格子涡粘系数的理性表达式，他们将这一模型称为理性亚格子模型（CZZS模型），使用该模型对各向同性湍流和槽道流的模拟都获得了满意的结果。后来，他们用类似的方法推导了可分辨尺度标量湍流的Yaglom方程，据此得到亚格子扩散系数的理性表达式，对标量湍流的模拟也取得了成功^[180]。但进一步的研究发现，CZZS模型对强各向异性湍流的模拟却不能得到满意的结果，崔桂香等人又对该模型进行了改进，解决了这一问题，新的模型对槽道流等的模拟也获得了比以前更好的结果^{[181][182]}。

1.2.3.3 高雷诺数与高马赫数的挑战

前已述及，高雷诺数条件带给大涡模拟的主要问题是无法承受的巨大计算量，特别是对于近壁流动，Piomelli等^[68]的估计表明：对雷诺数为 10^6 量级的湍流边界层，99%的网格点都被用来分辨只占边界层厚度10%的内区。既然几乎所有的计算资源都被内区消耗，非常自然的想法，如果能够针对边界层内区发展适合的模型从而避免直接计算，就可以解决这一问题，于是处理高雷诺数流动的第一种方法便是发展壁面模型。事实上，几乎从大涡模拟方法出现开始，发展壁面模型的努力就没有停止过^{[82][183][184]}，目前常用的壁面模型有两种，第一种利用壁面率为外区计算提供边界条件，第二种则是在近壁区数值求解简化的边界层方程，更多的细节可以参考文献^{[68][37]}。虽然最近几年相关的

研究工作仍不断出现^{[185][186][187]}，但总的来说，壁面模型方法远未成熟，首先，在理论上，精确的壁面模型需要重构界面的湍流脉动，而这无疑是极端困难的；其次，即便对槽道等标准流动的壁面模型取得了成功，如果要将这些模型推广到一般的复杂工程流动问题，这中间仍然存在巨大的差距。处理高雷诺数流动的第二种途径就是前述的hybrid RANS/LES方法，相对来说，该方法的发展与应用较为成熟。按照 1.2.1.4 对hybrid方法的分类，由于分区hybrid方法（强耦合方法）涉及界面湍流脉动的重构，实施难度大、应用少，因此这里的讨论主要针对全局hybrid方法（弱耦合方法）。对于全局方法而言，无论是DES或者显式混合方法，他们与壁面模型的主要区别都在于^[26]：壁面模型只对边界层内区建立模型，而全局方法通常对整个边界层都使用RANS求解，于是，对于高雷诺数工程流动问题，全局方法的计算量比使用壁面模型的情形更小，因而也更有可能会获得广泛的应用。当然，全局方法也存在一些缺点，由于该方法对RANS/LES的界面实行连续处理而不重构湍流脉动，因此全局hybrid多适合于某些存在强不稳定性而对界面脉动不敏感的流动问题^[26]。除了上面叙述的两种途径，以MILES为代表的隐式大涡模拟方法也可以被用来处理高雷诺数流动问题，但是，这仍然需要结合恰当的壁面模型^{[130][131][188][123][189]}或者发展RANS/MILES的混合方法^[190]才能进行。

对于高马赫数流动，这里主要讨论如何处理流场中的激波等强间断现象，在“物理的LES”范畴内，亚格子模型显然对计算结果的好坏起着关键性的作用，但捕获激波引入的数值/人工粘性却可能“淹没”亚格子模型的效应、影响对流场中大尺度结构的分辨，到目前为止，这一问题还缺乏有效的解决方案。对于非“正统”的大涡模拟方法，情况则好的多，比如 1.2.3.2 提到的ADM模型，在对超音速压缩角的计算中获得了极大的成功^{[164][171][172]}，几乎可以认为这是目前得到的最佳结果。MILES由于通常使用保单调格式，也能够很好的捕获间断，如文献 [191]对超音速压缩角的计算，但是，该方法对经验的过渡依赖可能导致计算结果的精度较低。实践表明，采用显/隐式滤波的ILES方法也有能力处理这一问题，例如，文献 [158]使用显式滤波方案，很好的捕获了超音速喷流中的激波胞格（shock-cell）结构。相比显式方案，隐式方案则需要对格式进行适当的修正，文献 [140][141]通过在间断处局部使用Roe格式，较好的完成了对超音速压缩角的模拟；最近，Kawai和Lele将局域化的有偏人工粘性/扩散格式（localized high-wavenumber biased artificial viscosity and diffusivity schemes）应用到Visbal等发展的FDL3DI程序中，对超音速横流的射流掺混进行了模拟，也取得了很好的结果^{[192][193]}。

1.2.3.4 大涡模拟的应用

随着大涡模拟方法的不断成熟以及计算机运算速度的持续提高，LES的应用也越来越广泛^{[109][110][57][194][195]}，这里通过列举有关机理研究和工程应用的几个典型例子，用来展示大涡模拟方法的应用现状。

对于流动机理的研究而言，直接数值模拟显然是最为理想的方法，但DNS的巨大计算量限制了它的应用范围，处理具有较高雷诺数和/或复杂几何边界条件的流动问题，大涡模拟仍是目前阶段唯一可行的方法。为了研究液体轴流泵或涵道推进器中的气穴现象，You等人^{[196][197][198][199][200]}通过求解不可压的N-S方程组，对叶尖泄漏流进行了大涡模拟，其计算域如图6(a)所示，为了和已有的实验结果对照，计算雷诺数高达 4×10^5 。该问题的复杂性是显而易见的：首先，叶尖间隙的存在和小的叶片安装角使得计算域的几何边界非常复杂，计算网格生成困难；其次，如图6(b)，叶尖区域存在着非常复杂的流动结构，需要大量的计算网格结合先进的亚格子模型才有可能准确分辨；第三，需要用恰当的进口边界条件来模拟计算域入口的湍流边界层。为了实现对该问题的准确计算，You等人采用浸入边界(immersed boundary, IB)方法生成计算网格，总的网格点数高达2000万(449×351×129)，亚格子模型采用了精度较高的拉格朗日型动力模型，随时间变化的瞬态入口边界条件则通过辅助计算提供，对比发现，计算结果与实验结果吻合的很好，表明了上述措施的有效性。You等人对计算结果进行了极为详尽的分析，研究了不同叶尖间隙尺寸对端区流动的影响^[198]、叶尖区域涡系的非定常特性^[199]、叶尖泄漏流粘性损失机理^[200]等方面的内容，大大加深了人们对该问题的认识。总的来说，对于如此复杂的高雷诺数流动问题，巨大的计算量限制了直接数值模拟方法的应用，针对流动的具体特点，细致考虑求解过程的每一个部分，LES成功实现了对该问题的精细模拟。这一实践表明：大涡模拟是有能力用于较高雷诺数复杂流动问题机理研究的。

除了用于机理研究，近年来，大涡模拟在处理工程流动问题方面也取得了巨大的进步，由于工程问题本身可能涉及多种物理现象(多物理场耦合)，导致LES也常常和其他问题结合在一起，这中间最常见的有两种，其一是LES和燃烧的耦合，其二是LES和计算气动声学(computational aeroacoustics, CAA)的耦合。文献[38]指出，对燃烧现象的模拟是LES最接近工程实际应用的一个领域，事实上也正是如此，目前的多物理场LES代码已经能够处理以航空发动机燃烧室为代表的真实环境中的燃烧现象，其中较为成熟的代码有两个^[201]，由Stanford大学发展的CDP和欧洲CERFACS发展的AVBP。发生在航空发动机燃烧室中的物理现象是相当复杂的：液态的燃油从喷嘴高速喷出，油膜由于自

身的不稳定迅速破碎成大的液滴，液滴在周围气流的作用下进一步破碎形成液雾，液雾与回流区中的气流充分掺混、受热蒸发产生燃油蒸气，燃油蒸气和空气的混合物燃烧形成非预混的火焰，由于这一过程涉及气液两相流动和化学反应，模拟的难度相当大。图7展示了对真实航空发动机中燃烧现象进行大涡模拟得到的结果，其中图(a)是对普惠公司某发动机燃烧室一个扇区模拟得到的瞬态温度场分布^[202]；图(b)则是对某直升机发动机点火过程的模拟，该发动机燃烧室为环形，包含18个燃油喷嘴和两个点火器，为了真实模拟点火过程，计算覆盖整个环形区域，网格单元1900万，计算在包含700个处理器的并行机上完成，整个点火过程的模拟花费了160小时^[203]。从这两个例子可以看出，虽然燃烧现象异常复杂，但目前的大涡模拟技术已经有能力对工程中的真实燃烧现象进行较为准确的模拟。

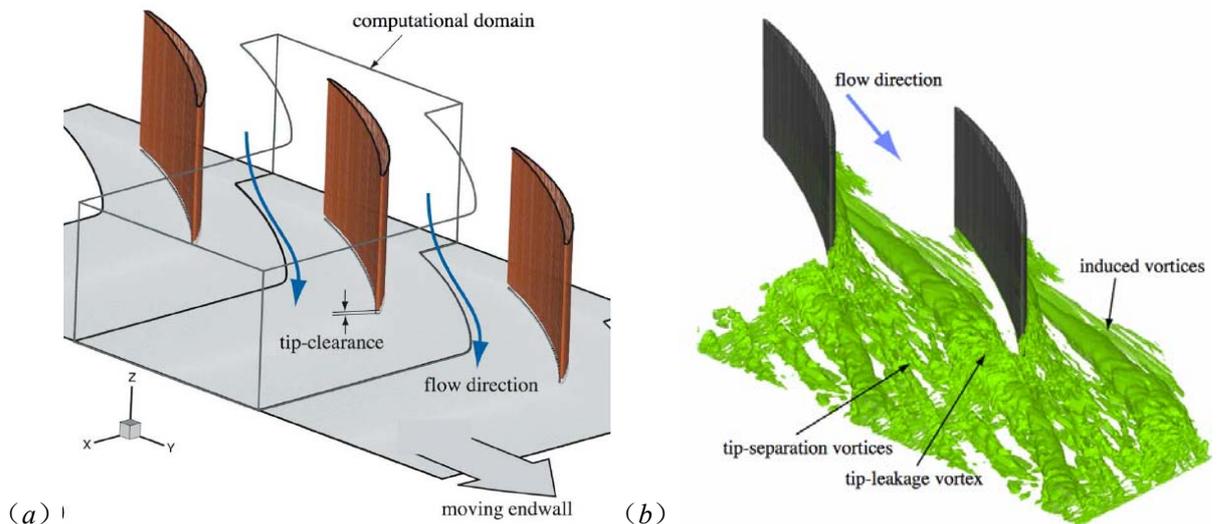


图6 对叶尖泄漏流的大涡模拟 (a) 计算域示意图^[199]；(b) 叶尖区域涡系的瞬态图画^[200]

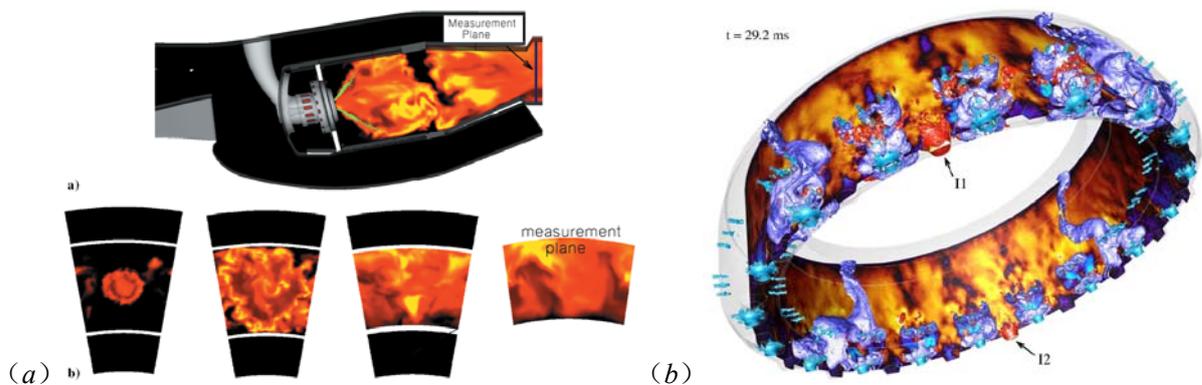


图7 对真实航空发动机中燃烧现象的大涡模拟 (a) 普惠发动机燃烧室中的瞬态温度场图画^[202]；
(b) 直升机发动机燃烧室点火过程中某一时刻的瞬态图画^[203]

1.3 低压涡轮内部的非定常流动

1.3.1 非定常气动环境

虽然目前绝大多数的设计体系都是基于定常流假设，但叶轮机内部的气动环境本质上是非定常的。这种非定常性主要由转子和静子之间的相对运动所引起，具体包括^[61]：

(1) 位势作用，即由于转子和静子压力场的相对运动所引起的非定常性，表现为无粘作用，它的影响可以向上下游相邻叶片排传播，一般在一个栅距之内衰减，在其作用范围内（叶片排轴向间距较小时）引起的非定常效应非常明显，它会导致叶片排上下游周向流场的非均匀分布；(2) 尾迹与下游叶片排之间的相互作用，即转子/静子叶片的尾迹通过下游静子/转子时，与下游边界层的相互作用，它是非定常流动现象的重要来源之一，其作用范围比位势流大，可以影响到下游几个弦长距离；(3) 多级环境中存在的非定常现象如clocking效应等。此外，进口畸变、喘振、颤振、旋转失速以及二次流、叶尖泄漏、分离流、转捩、尾迹旋涡脱落、随机湍流脉动等也是非定常效应的重要来源，这些现象混杂在一起，共同构成了叶轮机内宽频谱的非定常流动^[204]。随着研究工作的深入，人们已经逐渐认识到非定常效应对叶轮机性能的影响，如clocking现象、尾迹无粘恢复过程、热斑等等，并开始在设计中对这些非定常效应加以考虑。对于低雷诺数低压涡轮而言，周期性尾迹对叶片边界层的发展有着显著影响，因此，在设计中计及尾迹的非定常效应显得尤为重要。

1.3.2 尾迹在叶栅通道内的输运

由于涡轮内部的叶片处于级的工作环境，上游叶片表面边界层离开尾缘，伴随着动叶的转动，产生非定常尾迹，在下游叶片排入口形成周期性的非定常扰动，它对下一排叶片的边界层流型、速度、压力、剪切应力分布等都会产生影响。Meyer第一个对尾迹的运动图画进行了描述^[205]，Smith则观察到尾迹输运过程中存在的尾迹弯曲(bowing)、再定向(reorientation)、拉长(elongation)和拉伸(stretching)等现象^[206]。

图8给出了某涡轮叶栅内尾迹的输运图画，其中图(a)是Wu和Durbin的直接数值模拟结果，图中所示为某一相位下周期性扰动速度矢量图，可以清楚的看到尾迹引起的逆射流(negative jet)^[50]；图(b)是Stieger和Hodson^[207]用LDV测得的相位平均湍动能的时间序列，清晰揭示了尾迹在叶栅通道内的输运过程：叶栅前缘平面附近，尾迹被叶片前缘切断，由于叶栅通道中间流速大，而靠近叶片前缘位置流速小，以当地速度输运的尾迹因此弯曲成弓形。弯曲的尾迹进入叶栅，由于近吸力面流速高于近压力面流速，近吸

力面尾迹在通道内输运的更快，导致靠近压力面尾迹段的轴线沿逆时针方向缓慢旋转，最后几乎和压力面平行，这就是尾迹的再定向过程。图（a）中通道内尾迹上的双箭头标示了尾迹所处位置流场的主应变方向，压力面附近，拉伸方向与尾迹主轴方向一致，尾迹受拉伸变长变细；吸力面弓形顶点附近，拉伸方向与尾迹主轴垂直，尾迹在拉伸作用下变粗，这和图（b）的结果完全一致。从图 8 也可以看出，通道内吸力面附近的逆射流，朝向吸力面运动，最后撞击到吸力面上，形成吸力面附近的堆积，逆射流的扰动使得尾迹中心下游表面附近的流动加速，上游表面流动减速，尾迹两侧形成一对反向旋转的涡对（counter-rotating vortices）。

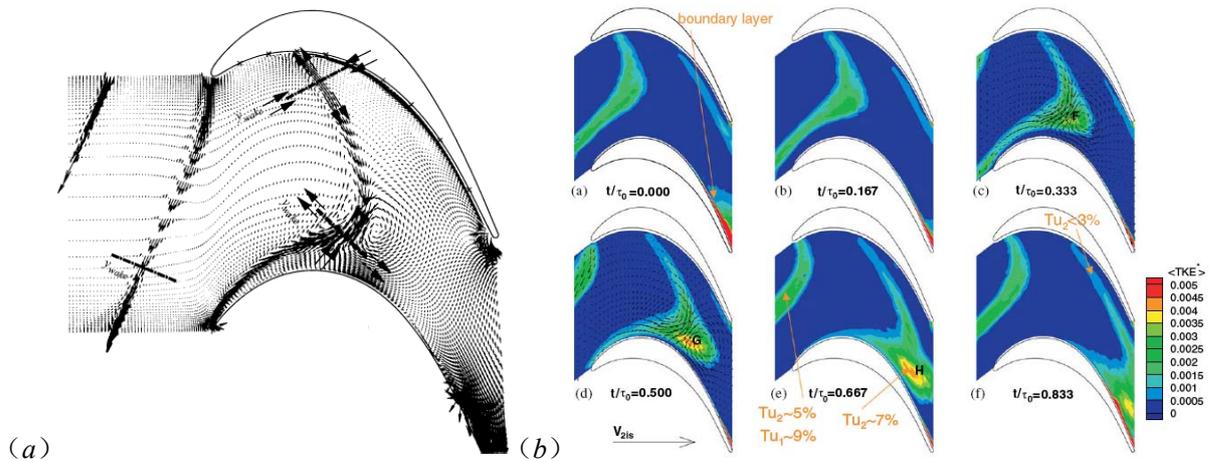


图 8 尾迹在涡轮叶栅通道内的输运 (a) DNS得到的某一相位下周期性扰动速度矢量图^[50]; (b) LDV测得的相位平均湍动能分布的时间序列^[207]

1.4 边界层的转捩与分离

低雷诺数条件对叶片性能的主要影响在于边界层的发展，而决定边界层流动状态的重要因素就是分离和转捩现象。要在低雷诺数条件下控制流动分离或减小分离带来的损失，并为气动设计提供新的思路，就必须对叶片表面边界层的发展及其非定常响应机制，包括层流分离、转捩等流动现象进行细致的研究。

层流到湍流的转捩过程传统上被分为三类^{[9][208][209]}：自然转捩（natural transition），旁路转捩（bypass transition）和分离流转捩（separated-flow transition）；对于叶轮机而言，除上述三种模式外，还存在尾迹诱导的周期性转捩和逆转捩（reverse transition, relaminarization）等现象。叶轮机中的转捩可以是多模式的（multi-moded），即在同一时间、同一叶片表面的不同位置可能出现不同的转捩模式。各种转捩模式的特点分别如下：在自然转捩过程中可以明显观察到T-S波的生成、发展过程；而旁路转捩过程由于受其

他流动因素（如高的来流湍流度）影响，在转捩发生时T-S波还很微弱或者根本没有生成；分离流转捩最大的特点是存在层流分离现象，转捩通常发生在层流分离之后；逆转捩则多发生在加速因子较大的区域，流动由紊乱的湍流状态转为有序状态，间歇因子下降，需要指出的是，逆转捩过程后的流动并非完全变成层流；尾迹诱导转捩则普遍存在于叶轮机械中，即上游叶片排周期性尾迹与下游叶片边界层相互作用诱导的转捩过程，本质上属于旁路转捩。

影响转捩的环境因素很多，如雷诺数、压力梯度、来流湍流度、表面粗糙度、噪音、振动、周期性尾迹等等，而正是受这些条件的作用才导致了不同的转捩模式^[9]；对于低压涡轮叶片而言，在其他条件相对固定的前提下，来流湍流度和周期性尾迹显然是影响叶片表面转捩模式的最重要因素。本节的内容安排即以湍流度的影响为主线，首先介绍了附着边界层中的两种转捩模式；接下来对转捩研究中的重要概念——湍流斑单独进行分析；第三部分的内容是关于层流分离流动及其转捩现象；最后部分则根据目前的研究现状，对大涡模拟预测转捩及分离流动的能力进行了评估；而有关周期性尾迹影响转捩的内容将在1.5节单独阐述。

1.4.1 附着流转捩机理

对于附着的边界层流动（attached boundary layer），存在两种常见的转捩模式：自然转捩和旁路转捩。自然转捩通常发生在低来流湍流度条件下（小于1%）^[209]，图9给出了平板边界层自然转捩过程的示意图^[210]，整个过程可以描述如下：自然转捩起源于边界层的粘性不稳定性，从平板前缘开始，自由流中的扰动以某种方式进入边界层（感受性过程），当边界层的雷诺数大于临界值 Re_{crit} 时，边界层失稳，小扰动发展成二维的T-S波；二维T-S波的幅值增长到一定程度，三维不稳定性开始发展并快速增长，出现三角形的 Λ 涡； Λ 涡在非线性作用下继续发展形成明显的发卡涡，而发卡涡结构的快速生长最终导致了层流状态的崩溃（break down），从而在局部区域形成湍流斑（turbulent spot）；起源于不同位置的湍流斑在向下游运动的过程中不断生长，最终汇聚到一起成为完全的湍流边界层，转捩过程结束。

当流动中存在足够幅值的扰动时（如高的来流湍流度或表面粗糙度），图9中自然转捩过程的前三个阶段可以被绕过而直接在边界层中形成湍流斑，这就是旁路转捩模式。对旁路转捩而言，转捩发生时T-S波还很微弱或者根本没有生成，由于掠过了不稳定波发展的三个阶段，转捩区的长度较自然转捩大大缩短；需要注意的是，事实上，这两种模态对应的转捩雷诺数 Re_{θ} （动量厚度雷诺数）是不同的，自然转捩的 Re_{θ} 通常高

达 400，而高湍流度下旁路转捩的 Re_{θ} 甚至可能只有 100^[9]，也就是说，旁路转捩较自然转捩而言，转捩出现的位置往往大大提前了。

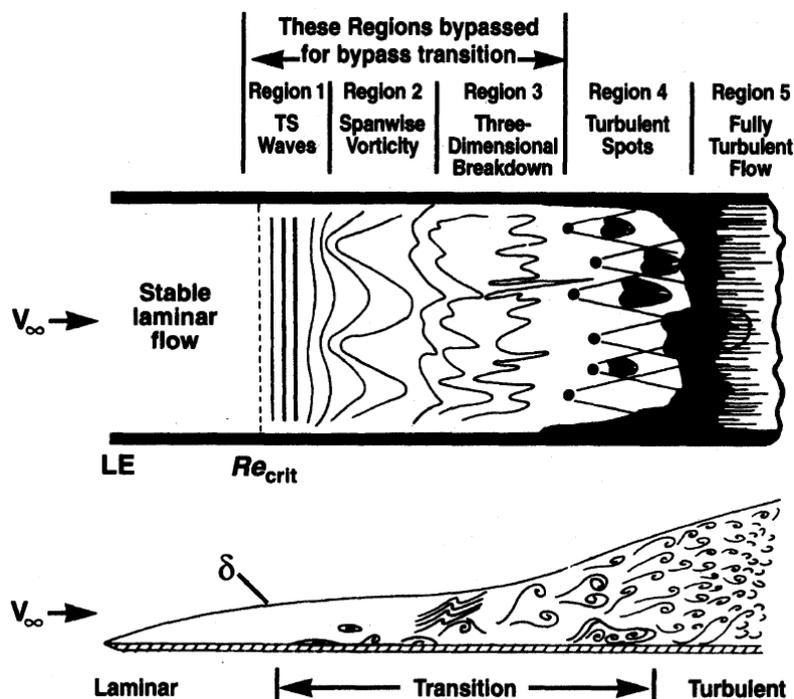


图 9 平板边界层的自然转捩过程示意图^[210]

旁路转捩模式最重要的特征之一，就是层流边界层中流向速度的条带（streaks）结构^[21]，如图 10 所示，图中给出了 6.6% 来流湍流度下旁路转捩过程的流动显示图画^[211]，从图中可以清晰看到流向的条带以及随机嵌在条带中的湍流斑，显然，这里的条带与湍流边界层中的条带并不是同一个概念。研究表明^[21]，条带结构和边界层中的低频扰动相关，从平板的前缘就开始发展，虽然其流向尺度很大，但展向和法向尺度都和边界层厚度处于同一量级；此外，流向速度扰动沿壁面法向的分布也和 T-S 波明显不同，且法向速度的扰动较流向速度扰动小的多。

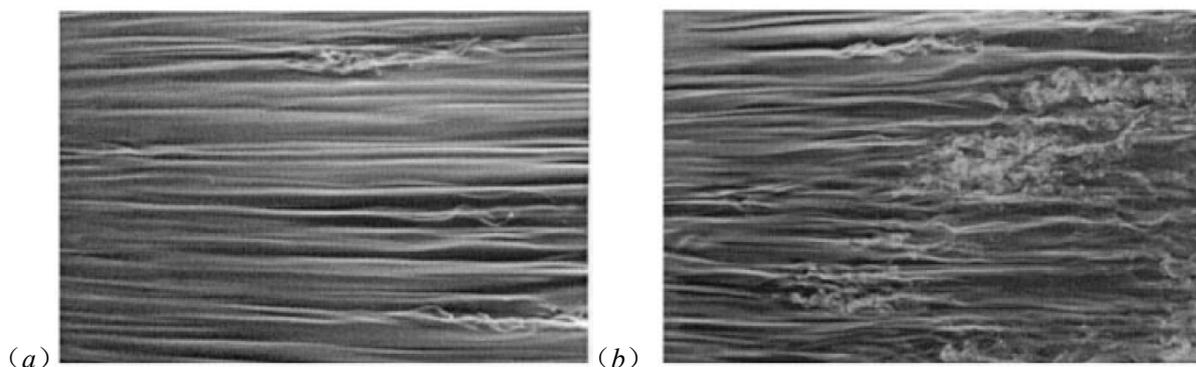


图 10 旁路转捩过程的流动显示图画，湍流度 6.6% (a) $U_\infty = 2 \text{ m/s}$ ；(b) $U_\infty = 3 \text{ m/s}$ ^[211]

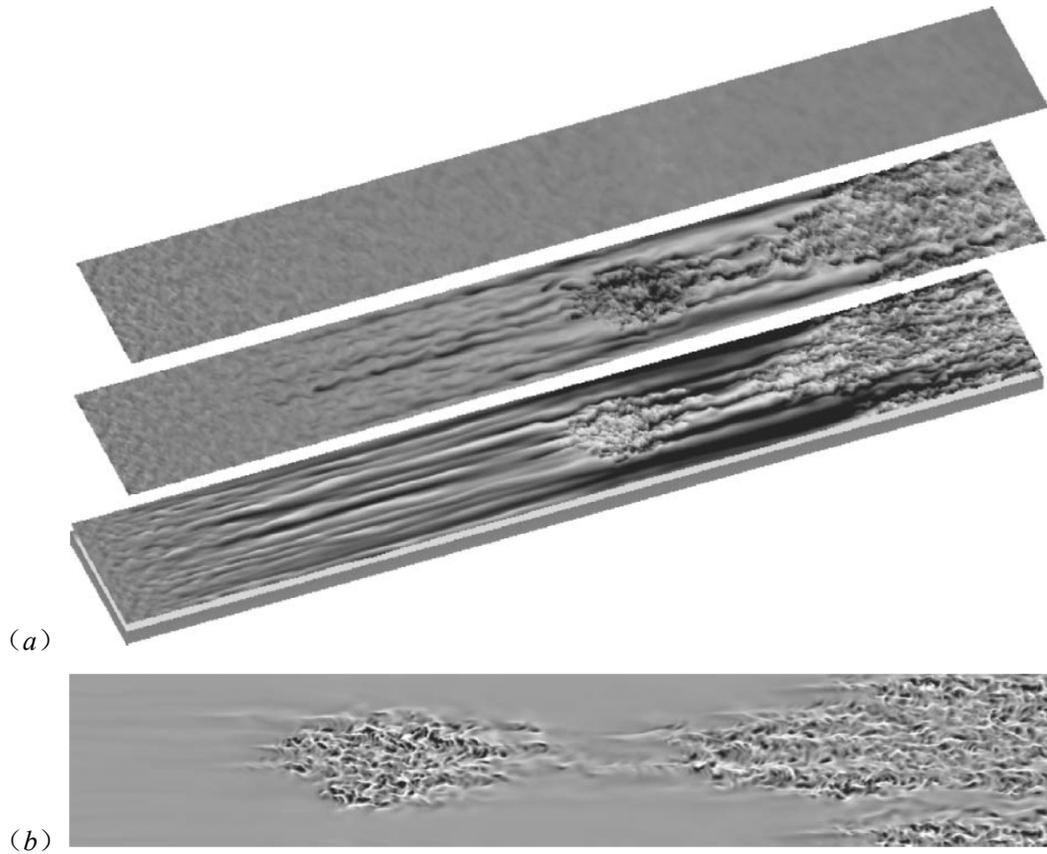


图 11 直接数值模拟得到的旁路转捩图画 (a) 某一时刻的流向速度云图, 从上到下三个水平截面分别位于自由来流、 $y \sim \delta$ 、 $y \sim \delta/3$; (b) 边界层内某一水平截面的法向速度云图^[49]

虽然应用流动稳定性理论可以对条带结构进行一定的解释, 但直到上世纪末, 对于整个旁路转捩过程、特别是湍流斑的产生机理, 人们的认识并不清楚。Stanford大学以Durbin为首的研究者, 采用直接数值模拟方法、结合理论分析, 对高湍流度下的旁路转捩现象进行了一系列的研究工作, 终于对这一问题有了比较完善的认识^{[212][47][48][49]}。图 11 即给出了采用DNS得到的旁路转捩过程某一时刻的瞬态流动图画^[49], 同图 10 比较可以发现, DNS非常真实的刻画了转捩过程的每个细节。按照Durbin等人的观点, 可以将整个旁路转捩过程描述如下: 对于层流边界层而言, 由于剪切庇护 (shear sheltering) 效应的存在, 其剪切层类似于一个低通滤波器, 外部自由流湍流 (free-stream turbulence, FST) 扰动的低频分量可以进入边界层, 高频分量却被阻止; 在剪切作用下, 进入边界的低频扰动沿流向被放大和拉伸, 形成流向速度的条带结构, 正是这些条带构成了流向扰动速度场中的前向射流 (forward jets) 和逆向射流 (backward jets); 当逆向射流被抬升到边界层边缘时, 剪切庇护效应不再存在, 逆向射流速度型自身的Kelvin-Helmholtz (K-H) 不稳定性被自由流中的小尺度扰动 (高频分量) 触发, 导致流动崩溃, 由此产

生不规则运动的湍流碎片，碎片逐渐长大形成可见的湍流斑。Zaki和Durbin的进一步研究表明^{[47][48]}，事实上，只需要两个扰动涡模态而非自由流湍流的全部模态即可触发旁路转捩：低频扰动刺入边界层，产生流向速度条带；高频扰动触发K-H不稳定性，导致流动的崩溃。有关旁路转捩的更多细节可以参考文献[49]的评述。

1.4.2 湍流斑的研究进展

毫无疑问，湍流斑是转捩研究中最重要概念之一，转捩区的长度强烈依赖于湍流斑的特性，如湍斑的产生率（spot creation rate）、湍斑前缘和尾缘的运动速度、横向生长率（lateral growth rate）、湍斑间的相互作用规律等等^[45]，而对转捩区长度的预测能力也是评价工程转捩模型优劣的一个重要标准。Emmons于1951年首先发现了湍流斑的存在^[213]，随后，Schubauer和Klebanoff在1955年对人工产生的湍流斑进行了研究，他们发现，零压力梯度下的湍流斑呈三角形并以常速率生长^[214]。

图12给出了传统意义上湍流斑的示意图^[10]，其中图(a)和(b)分别是湍斑的侧视和俯视图，图中标明了湍斑产生的“源点”，自湍流斑出现开始，在向下游运动的过程中，其面积不断扩大。研究表明，湍斑的横向伸展半角（lateral spreading half-angle）保持约 11° ，前缘三角形的半角为 15° ，其前缘和尾缘的运动速度分别近似等于 $0.88U_e$ 和 $0.5U_e$ ，平均速度等于 $0.7U_e$ （ U_e 为当地自由流速度）。在湍流斑后面存在一个近似矩形的非湍流区域，该区域对扰动不敏感，因此被称为寂静区（calmed region），它能比周围流体更持久的保持层流状态。图(c)给出了沿湍斑中心线壁面剪切应力的分布，如图所示，在湍斑下游，壁面剪切应力很小，流动保持层流状态；到了湍斑内部，剪切应力水平很高且存在强烈脉动；而在紧随湍斑的寂静区，初始剪切应力同湍斑内部一致但不存在脉动，沿着寂静区朝向

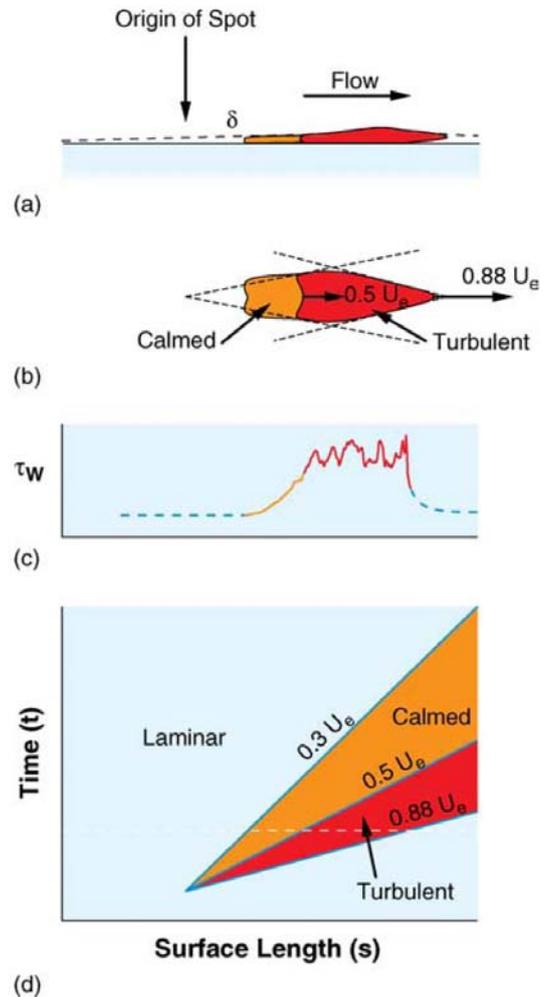


图12 湍流斑示意图 (a) 侧视图；(b) 俯视图；(c) 沿湍斑中心线的壁面剪切应力分布；(d) 沿湍斑中心线的时空图^[10]

其尾缘，剪切应力逐渐恢复到未受扰动的层流水平。显然，寂静区具有比层流边界层更饱满的速度型，它的存在保证了湍流斑尾缘湍流速度型和未受扰动层流速度型的光滑过渡。图（d）给出的是沿湍流斑中心线的时空图，图中标明了流动所处的三种不同状态：湍流斑前/尾缘运动迹线所形成的楔形区域为湍流区；湍流斑尾缘运动迹线与 $0.3U_c$ 速度线所形成的楔形区域则是寂静区，其尾缘的运动速度通常为 $0.2 \sim 0.3U_c$ ；湍流区和寂静区以外的区域，流动处于层流状态。从时空图上还容易看出，在给定的空间位置，流动处于寂静区的持续时间大于湍流区的时间。正是由于寂静区具有比层流更饱满的速度型，对环境扰动不敏感，因而它比周围流体更持久的保持层流状态，能够抵抗转捩和分离，这一特点对于低压涡轮的气动设计具有非常重要的意义。

自Emmons发现湍流斑以来，与之相关的研究工作不断涌现，一方面，研究者期望了解诸如压力梯度等外部环境因素对湍流斑演化过程的影响^{[215][216]}；另一方面，很多工作也致力于深入认识湍流斑自身的结构特征^[217]。图13给出了成熟Emmons湍流斑的图画，其中图（a）是它的结构示意图^{[44][45]}，可以发现，沿着湍流斑的前缘和侧面，湍流核（turbulent core）中的湍流流体都悬于周围层流流体的上方，形成所谓的前部悬臂（front overhang）和展向悬臂（spanwise overhang）结构。图（b）则是Cantwell等通过流动显示得到的湍流斑图画^[218]，从图中容易看出，湍流斑的湍流核中包含了大量的流动结构，他们持续到湍流斑尾缘界面以后，表现为流向的条带结构，这就是前述的寂静区。

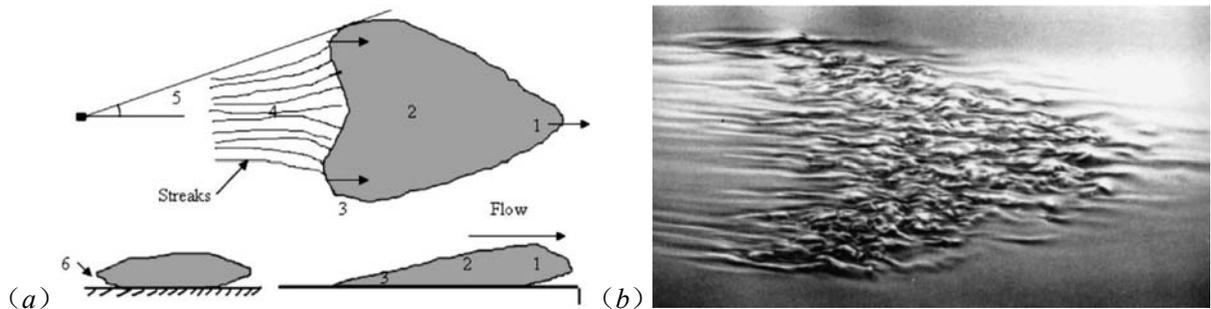


图13 成熟的Emmons湍流斑（a）结构示意图^{[44][45]}，其中：（1）前部悬臂，（2）湍流核，（3）横向翼尖，（4）寂静区，（5）横向伸展半角，（6）展向悬臂；（b）流动显示图画^[218]

最近，英国Southampton大学的Sandham等人利用直接数值模拟方法，对超音速边界层中湍流斑的演化，包括湍流的内部结构、湍流斑合并、湍流斑/分离泡的相互作用等内容进行了极为细致的研究，大大加深了人们对湍流斑的认识^{[44][45][46]}。图14是通过DNS得到的 $Ma = 2$ 条件下的孤立湍流斑^[44]，从图中容易看出：发卡涡和准流向涡是湍流斑中的主要子结构，正是湍流斑尾缘界面以后的流向涡结构形成了前述的寂静区^[45]。对于湍流的

生长机制, Sandham等也作出了较为深刻的分析^{[44][45][46]}: 沿壁面法向的生长类似于经典的卷吸(entrainment)过程, 湍斑上面部分的发卡涡涡头受速度差诱导而不断发展, 裹入周围高动量流体, 其前部悬臂的形成也与此有关; 横向的生长则被认为是通过使周围层流流体失稳造成的, 湍斑的横向翼尖(lateral wingtip)附近, 展向和法向剪切的作用使该区域形成流向涡, 流向涡的上洗(upwash)效应抬升湍斑外侧的层流流体, 产生局部有拐点的速度剖面, 不稳定的速度剖面快速破碎成湍流, 由此实现湍斑的横向生长。

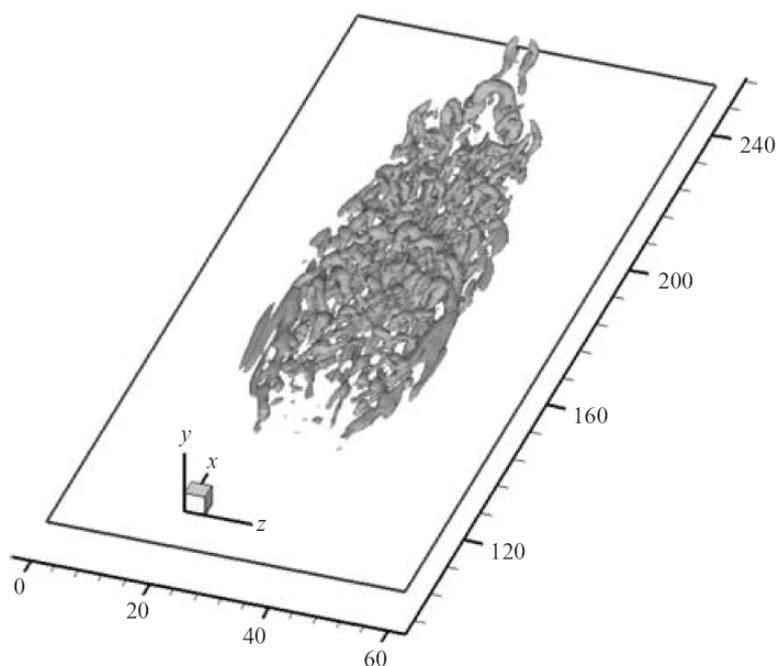


图 14 采用 DNS 得到的孤立湍流斑, $Ma = 2$ ^[44]

需要特别指出的是, 大多数关于湍流斑的实验研究^{[215][216][217]}、以及 Sandham 等的数值模拟工作^{[44][45][46]}, 其湍斑的产生都是通过在上游壁面施加激励(如壁面吹气)实现的, 也就是说, 湍斑起源于壁面; 但对于在外部扰动(如自由流湍流、周期性尾迹)作用下产生的湍流斑, 由 1.4.1 的分析可知, 其产生位置则位于边界层的外缘: 由此形成了所谓自下而上(bottom-up)和自上而下(top-down)两类起源的湍流斑。Durbin 等的观点认为, 这两者在形态上是不同的^[49]; Sandham 等则对这一观点进行了反驳, 他们指出, 差异的产生来源于观察位置的不同^[44], 到目前为止, 这一问题还缺乏明确的答案, 需要进一步的深入研究。

1.4.3 层流分离流动

层流分离泡现象的研究已有很长时间历史, 1968 年, Horton 首先给出了分离泡的时均结构^[219], 如图 15 所示^[220]。关于分离泡的形成过程, 一般解释如下: 对于逆压梯度下的层流边界层, 近壁流体由于缺少足够的动量抵抗压力梯度而接近滞止, 滞止流体导致流动堵塞, 迫使流线远离壁面, 边界层发生分离; 分离的边界层离开壁面成为自由剪切层, 尽管初始状态为层流, 但由于速度剖面存在拐点, 剪切层高度不稳定, 很快发生

转捩；转捩后的剪切层从自由流中裹入高动量流体，将其输运到边界层内区，流线重新转向壁面，从而形成具有湍流再附的分离泡。

如图 15 所示，时均分离泡最显著的特征之一，便是它改变了边界层表面的压力（等熵马赫数）分布，形成明显的压力平台。传统上，根据分离泡对叶片表面压力分布的影响，它被分为两类^[221]：如果分离泡对压力分布只有局部效应，分离区以外的压力接近其无粘分布，就被称为短分离泡（short bubble）；反之，如果分离泡对整个叶片表面的压力分布都产生影响，导致叶片升力/气流折转角大大减小，就被称为长分离泡（long bubble）。根据分离点边界层的流动状态，Hatman和Wang进一步将分离泡分为三类^[222]：分离点的动量厚度雷诺数 $Re_{\theta_s} > 320$ 时，流动转捩位置在分离点以前，这时形成转捩分离模态（transitional separation mode）；雷诺数降低，转捩位置将出现在分离点以后，如果 $240 < Re_{\theta_s} < 320$ ，并且流动具有中等的压力梯度，这时候得到层流分离短模态（laminar separation short mode）；如果雷诺数继续降低且流动具有强逆压梯度，这时则形成层流分离长模态（laminar separation long mode）。对高升力低压涡轮叶片而言，在多数雷诺数范围内（ $10^5 < Re < 4 \times 10^5$ ），吸力面后部都形成短分离泡；长分离泡则可能出现在高空无人机的发动机中^{[7][10]}。

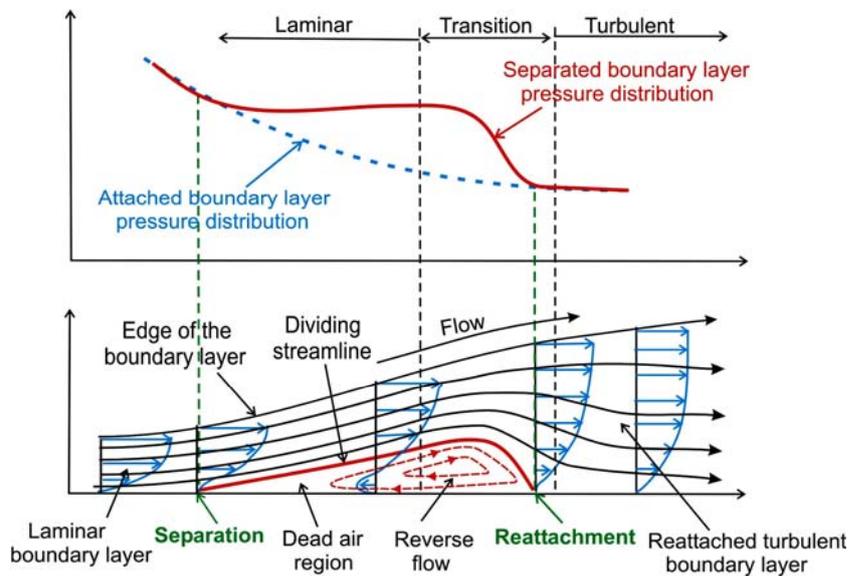


图 15 时均层流分离泡的示意图^[220]

图 16 形象地给出了雷诺数对低压涡轮叶栅性能及叶片吸力面流动图画的影响^[223]。由图可知，在高雷诺数条件下，流动损失较小，只有发生湍流分离时，损失才显著增加（区域 3）；当雷诺数很低时，流动维持层流状态，损失非常小，但一旦发生层流分离，流动损失将急剧上升（区域 1）。从图中也容易看出，随着雷诺数的降低，层流分离泡经历了

从短分离泡、长分离泡到开放式分离的转变。

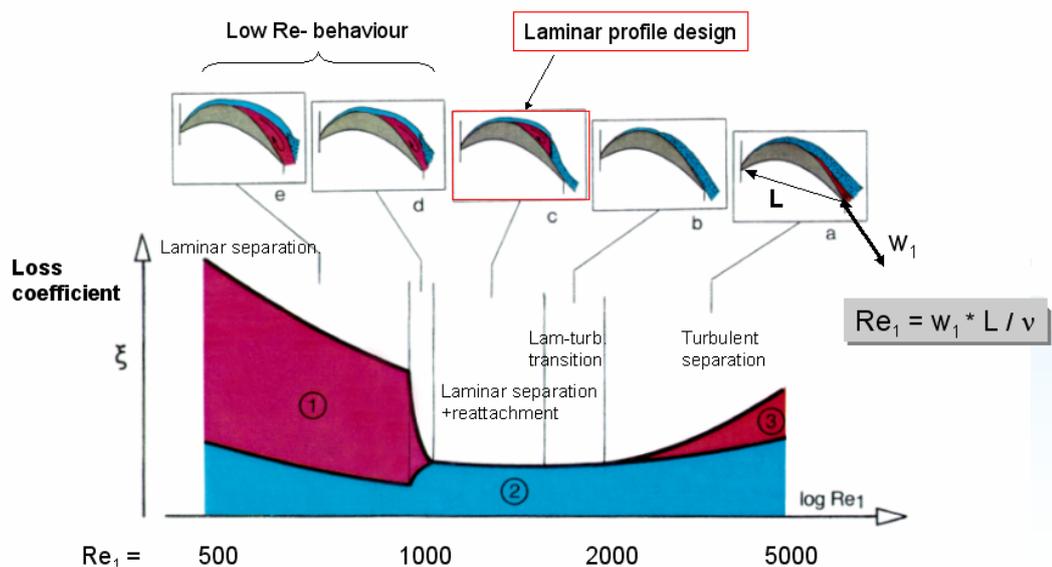


图 16 雷诺数对低压涡轮叶片流动图画及损失的影响^[223]

虽然Horton给出了分离泡的时均结构图画，但现实世界的分离总是非定常的，早期的工作中，人们利用稳定性理论和实验方法，对分离泡的不稳定性及相关现象进行了较为深入的研究^[20]，这些工作虽然大大促进了对该问题的认识，但要完全理解分离泡、特别是其演化发展的全部细节，却依然存在巨大的挑战。近年来，随着计算机技术的快速发展，DNS和LES在有关分离泡的研究中发挥了巨大的作用。

Alam和Sandham^[224]对短分离泡进行了DNS，计算中在上游壁面加入了人工扰动；Spalart和Strelets^[225]则采用DNS对低扰动环境中的层流分离泡转捩和传热进行了计算；Yang和Voke^[226]、Abdalla和Yang^[227]对不同雷诺数下的平板前缘分离泡问题实施了大涡模拟，图 17 所示为文献 [226]给出的某一截面瞬态展向涡量的时间序列，Yang和Voke对分离泡演化发展的整个过程描述如下：在分离前和分离点后面的部分区域，流动处于二维层流状态，由于速度剖面存在拐点，分离的自由剪切层是无粘不稳定的（K-H不稳定性），在向下游发展的过程中，这些二维的不稳定波通常以大于粘性不稳定波（T-S波）的放大率线性生长，自由剪切层上下摆动，出现展向涡，这一阶段，通过二次不稳定性，三维扰动也开始缓慢发展，二维展向涡出现沿展向的波状扭曲；接下来，扭曲的展向涡开始卷起，导致流向涡量的出现，而一旦扰动速度的幅值超过阈值，非线性作用也开始发展；大约在时均分离泡长度一半的位置，非线性作用已处于统治地位，显著的三维运动开始出现，展向涡发展成发卡涡，在接近时均再附点的位置，发卡涡逐渐破碎成湍流，流动在再附点以后迅速发展成湍流边界层。

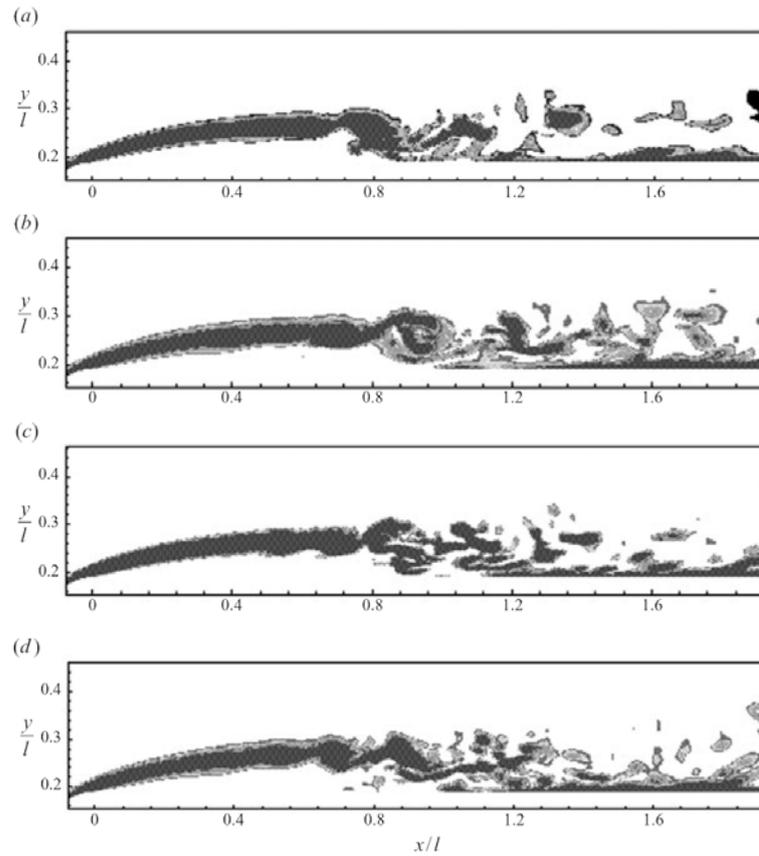


图 17 层流分离泡某一截面瞬态展向涡量的时间序列 [226]

上述关于层流分离泡现象的研究，多是针对低扰动环境，此时，无粘的K-H不稳定性占主导地位，类比附着流在不同湍流度下的两种转捩模态，对层流分离泡而言，在高外部扰动条件下是否存在其他转捩模式便是值得关心的问题；此外，Malkiel和 Mayle^[228]曾使用附着流的湍斑理论建立分离剪切层的转捩模型，但实际上，单个的湍斑并没有被观察到，那么，分离流转捩过程中是否真的存在湍流斑，也是值得关注的问题。近年来，利用数值模拟方法，对这些问题的研究也取得了一些进展。

Wissink和Rodi^[229]对 $Re = 60000$ 的层流分离泡进行了DNS，三个算例的来流湍流度分别为 0、5%和 7%，对计算结果的分析表明：没有湍流度时，数值截断误差触发了K-H不稳定性，有湍流度条件下，K-H不稳定性则由自由流扰动触发；随着湍流度的增加，分离泡尺寸明显减小，时均再附点位置也显著前移。图 18 给出了 $Tu = 0$ 和 7%的瞬态流场图画^[229]，两种情形下均可看到由K-H不稳定性所卷起的展向大涡，对 7%湍流度的算例，展向涡及其上游位置可以发现明显的流向条带结构，这可能和附着边界层旁路转捩中的条带来源一致；但是，文献 [229]并没有提及高湍流度下是否有湍流斑出现。

加拿大Carleton大学的Yaras等^{[230][231][232][233]}采用实验和数值模拟方法对分离泡转捩

问题进行了一系列的研究工作。在提高环境扰动的条件下，文献 [230]通过单点测量，在分离剪切层中观察到湍流斑的存在；文献 [233]则采用DNS对 5.1% 来流湍流度下的层流分离泡进行了计算，并和低湍流度的结果相对照，他们发现：低湍流度条件下，分离剪切层的转捩通过K-H不稳定性发生；但在高湍流度下，导致剪切层卷起的感受性机制被掠过，取而代之的是通过剪切层输运的流向条带，它们和附着边界层旁路转捩中的条带有着类似的起源，接下来，与这些条带相关的强剪切导致二次不稳定，湍流斑由此产生。Yaras等 [232][233]还发现，分离剪切层中的湍斑表现为一系列的涡环（vortex loops），其结构与附着流中的湍斑并不相同。图 19 给出了边界层中 $\bar{U} \approx 1/2\bar{U}_e$ 平面的脉动速度云图，其中 (a)、(b) 分别为流向和法向速度脉动，从图 (a) 中可以看到清晰的流向速度条带结构，两幅图中也可以观察到由一系列涡环所组成的湍斑。

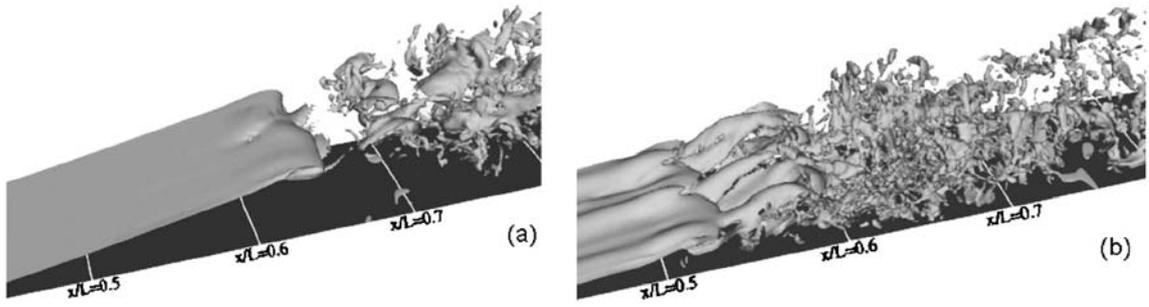


图 18 不同来流湍流度下的分离泡，图中所示为展向涡量的等值面 (a) $Tu = 0$; (b) $Tu = 7\%$ [229][56]

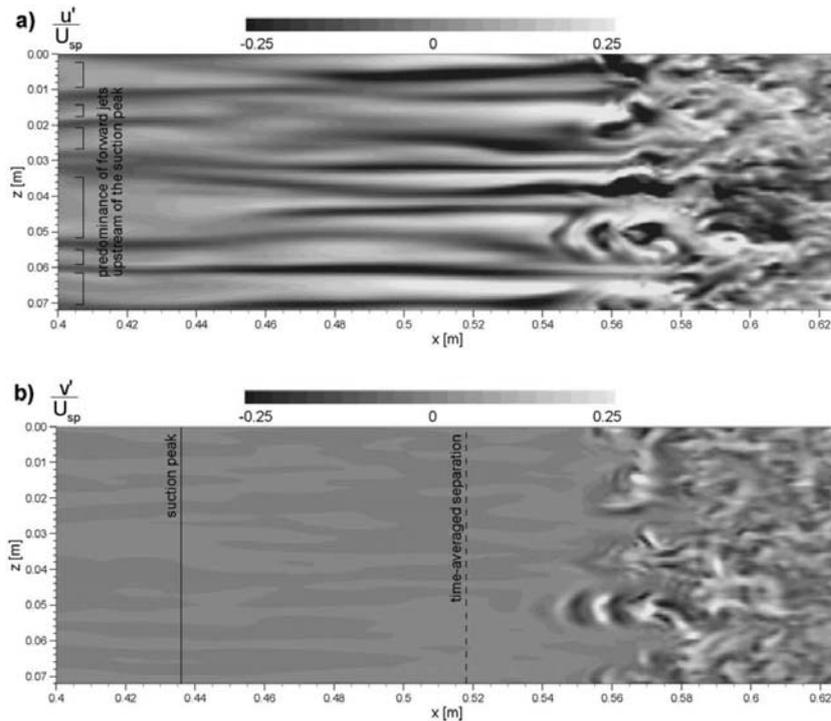


图 19 高来流湍流度下的分离泡转捩， $\bar{U} \approx 1/2\bar{U}_e$ 平面 (a) 流向速度脉动；(b) 法向速度脉动 [233]

1.4.4 转捩和分离的大涡模拟

作为一类高度复杂的流动现象，转捩和分离问题显然给数值模拟方法带来了巨大的挑战：DNS 不引入任何模型或假设，具有最高的时间/空间分辨率，是处理这类问题最理想的方法，但巨大的计算开销却限制了它的应用范围；LES 的计算精度仅次于 DNS，由于计算开销较小，因而能够获得较为广泛的应用。但 LES 是否能够准确的预测转捩和分离流动，这本身还存在一些疑问，这里即根据目前的研究现状，对大涡模拟处理这类问题的能力进行评估。

对于层流分离流，已有的经验表明，大涡模拟能够对其进行较好的预测，比如，前述 Yang 和 Voke^[226]、Abdalla 和 Yang^[227] 对不同雷诺数下平板前缘分离泡问题所进行的计算，细致描述了分离泡演化发展的整个过程；后来，Yang 和 Abdalla^[234] 还采用 LES 研究了来流湍流度对前缘分离泡的影响，也取得了较好的结果，他们在计算中使用的均是动力涡粘模型。又如，对于低雷诺数下的低压涡轮叶栅流动，吸力面后部存在较大的逆压梯度，通常导致该区域出现层流分离，Raverdy 等^[235]、Gross 和 Fasel^[236] 均采用隐式大涡模拟对这一问题进行了研究，计算结果和实验数据也都吻合的较好。

对于附着流转捩问题（自然转捩/旁路转捩），情况则相对复杂一些，虽然研究者一直尝试采用 LES 研究这类流动，如 Huai 等利用局域化动力模型对空间发展边界层^[237] 和后掠平板^[238] 转捩的模拟，Péneau 等利用动力混合模型对旁路转捩的模拟^[239]，等等，但对于大涡模拟能否真正预测转捩，不同研究者的认识还存在较大分歧，文献 [49] 甚至认为：转捩区的间歇性导致了亚格子模型的困难，在近壁区更是和大涡模拟自身的不准确性混合在一起，因此大涡模拟不能可靠的预测空间转捩。尽管如此，最近的一些研究工作，如 Schlatter 采用 ADM 模型对自然转捩的模拟^[240]，Kawai 和 Fujii 采用高阶紧致/滤波格式对自由流湍流诱导旁路转捩的模拟^[151]，都取得了巨大的成功，这些工作表明：尽管和 DNS 比较，LES 预测转捩的难度更大，但是，针对具体问题，只要恰当的选择亚格子模型以及数值求解方法，LES 仍然有能力对附着流转捩现象进行很好的预测。

从 1.2.1.5 的小结可以知道，本文期望通过数值模拟方法对低雷诺数条件下的涡轮叶片边界层流动机理进行研究，在所有候选的数值方法中，LES 或 DNS 较为合适，加上对计算开销的考虑，LES 似乎是唯一合理的选择。通过这一部分的讨论又可以知道，在恰当选择亚格子模型/数值方法的前提下，LES 能够较好的预测转捩和分离流动，由此可以预期：对于本文所研究的非定常扰动环境下的涡轮叶片边界层流动问题，大涡模拟方法应该能够进行准确的预测。综合上述分析，作者认为，大涡模拟是研究本文问题的最佳

数值方法。

1.5 尾迹与边界层的相互作用

上一节有关边界层转捩和分离现象研究进展的介绍，主要考虑了来流湍流度对它们产生的影响，由 1.3 节的分析可以知道，对真实的叶轮机械而言，上游的周期性尾迹是下游叶片排非定常性的主要来源之一，本节的内容即是介绍非定常尾迹作用下叶片边界层的转捩和分离现象，该问题的深入理解对发展高性能低压涡轮的气动设计方法具有重要价值。剑桥大学Whittle实验室以Hodson教授为首的研究团队，对这一问题进行了广泛而深入的研究^{[7][10]}，按照Hodson等研究者的看法，尾迹诱导的低压涡轮吸力面转捩现象，可能通过如下三种情形发生^[7]：（1）如果雷诺数足够高，转捩可能在层流分离点前面就已经完成，或者由于吸力面减速程度小，边界层不发生分离，尾迹导致附着流转捩；（2）如果吸力面尾部扩压梯度大且雷诺数很低，层流边界层趋向分离，尾迹诱导的转捩发生在分离区的自由剪切层中；（3）在中等雷诺数下，尾迹诱导附着流在层流边界层的分离点之前转捩，如果尾迹通过频率不是太高，边界层可能在两次尾迹通过的间隔发生分离和转捩。对于低雷诺数低压涡轮，极低的雷诺数通常导致第二种情况出现，亦即尾迹诱导的转捩发生在分离区的自由剪切层中。

1.5.1 尾迹诱导的附着流转捩

如果雷诺数足够高，或者吸力面减速程度小，尾迹诱导附着的边界层转捩。Addison和Hodson的研究表明^[241]，尾迹诱导的转捩直到动量厚度雷诺数大概超过 90~150 这一量级才会发生，这和已知的层流边界层在高来流湍流度下的旁路转捩行为一致。

Zhong等采用液晶显示方法再现了尾迹通过时湍流斑形成导致旁路转捩的真实过程^[242]，如图 20，图中清晰可见尾迹诱导作用下产生的三个湍流斑，测量表明湍流斑的产生和传播速率与常规的Emmons湍流斑相同，当湍斑向下游运动时，其长度和宽度增长，流动的紊乱程度增加，逐渐形成沿展向的湍流带（turbulent strip），在相邻的湍流带之间，转捩则经常以自然转捩方式进行。Wu等人利用DNS模拟了尾迹对边界层转捩的影响^[243]，他们发现转捩首先发生在孤立的湍流斑上，湍斑不断增大和向下游运动，最终逐渐汇合并形成充分发展的湍流边界层，瞬时的流场分析表明在湍斑形成之前，脉动的流向速度场中可以看到逆射流，这些位于边界层顶部的逆射流，伴随着K-H不稳定性，与尾迹中的小尺度扰动相互作用，导致了湍流斑的生成，这一过程与 1.4.1 中高湍流度下边界层旁路转捩产生湍斑的机理类似。

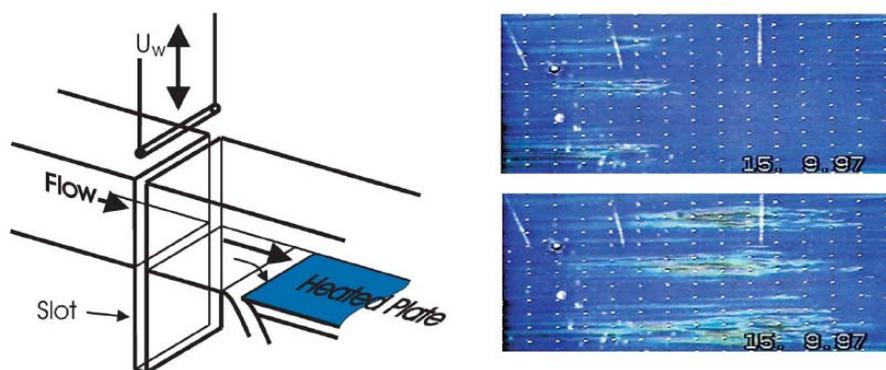
图 20 通过液晶显示的尾迹诱导流动转捩^[242]

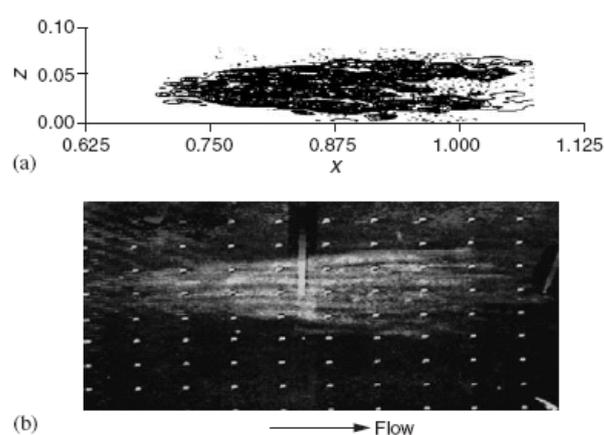
图 21 给出了Wu等的DNS模拟湍流斑和Zhong等的液晶显示湍流斑的比较^[7],可以看出,二者在结构上非常相似,但是,该湍流斑的形态不同于Emmons的经典湍流斑,这一方面可能是由于探测方法上的差异,另一方面则可能来源于低雷诺数效应。

尾迹诱导附着流转捩的过程可以描述如下:在边界层动量厚度雷诺数达到临界值位置,尾迹通过以后,边界层在尾迹诱导下转捩,湍流斑开始出现,向下游运动的过程中逐渐变大,紧随其后的则是寂静区,在两次尾迹通过的间隔,远下游位置出现自然转捩。

1.5.2 尾迹诱导附着流转捩对分离区的影响

随着雷诺数的降低,吸力面边界层发生层流分离的可能性增大。但是,通过在分离点以前诱导转捩,尾迹可以有效的消除分离区对叶型损失的影响^[7]。

图 22 为文献 [244]测得的尾迹作用下某平板边界层的形状因子及耗散系数的时空图,该平板在定常来流下存在一分离泡,图中直线B和D之间的区域代表尾迹诱导产生的湍流区,直线D和E之间的区域则是紧随其后的寂静区。从图 (a)可以看出尾迹与边界层的整个作用过程如下:尾迹通过旁路转捩诱导分离点上游附着边界层形成湍流斑,逆压梯度下,湍流斑生长,迅速结合成展向的湍流带,湍流带运动进入分离区域,抑制了自上次尾迹通过事件以来形成的分离泡。紧随湍流带的则是寂静区,寂静区的饱满速度型可

图 21 尾迹诱导的湍流斑^[7] (a) DNS 计算结果; (b) 液晶显示实验结果

以抵抗分离，寂静区通过后，当地逆压梯度增强，边界层出现拐点，再次发生分离。分离流通常和高损失相联系，但从图 (b) 可以看出：图 (a) 的高形状因子区域（分离泡形成的初始阶段）只有层流量级的耗散，这表明：定常来流下逆压梯度环境中高度耗散分离泡被尾迹通过事件之间的寂静区和分离初始阶段先后代替，这两者都具有低耗散的特点。尽管尾迹诱导的湍流带具有高耗散，时均的损失却由于寂静区和分离初始阶段的存在而被降低了 [7]。

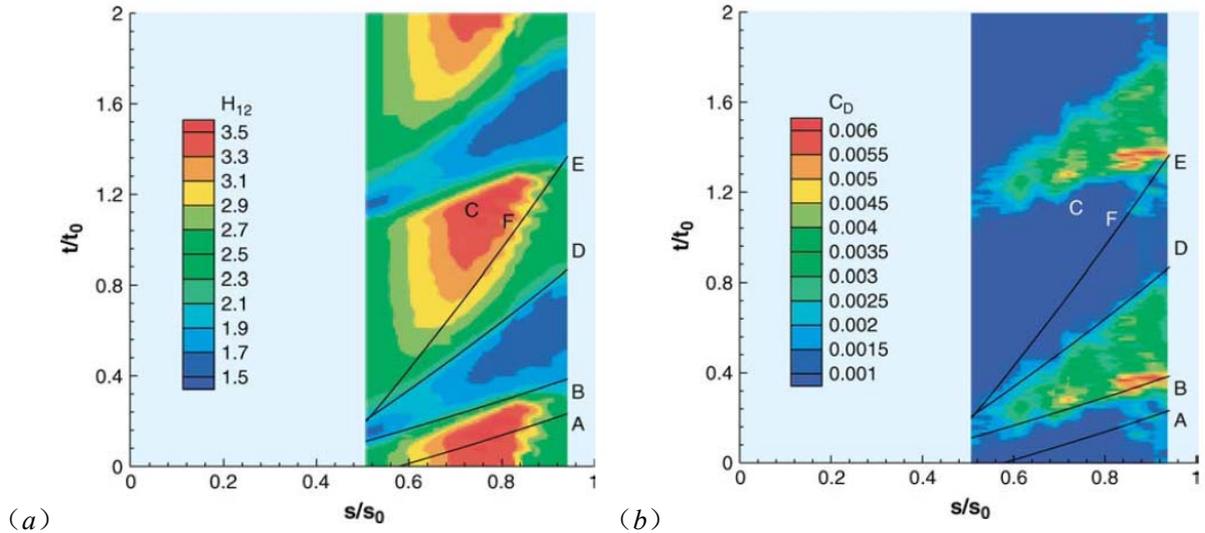
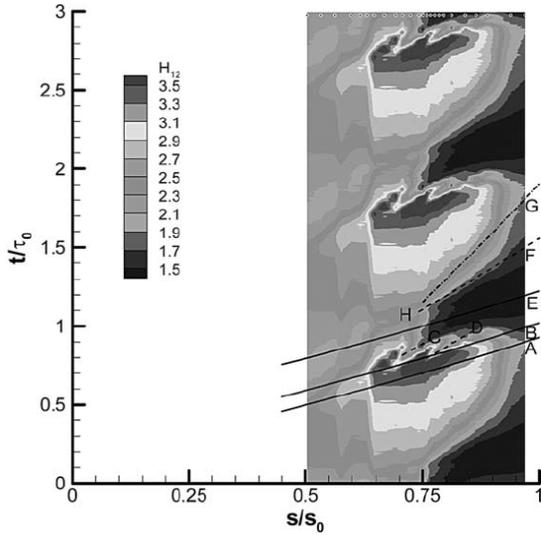
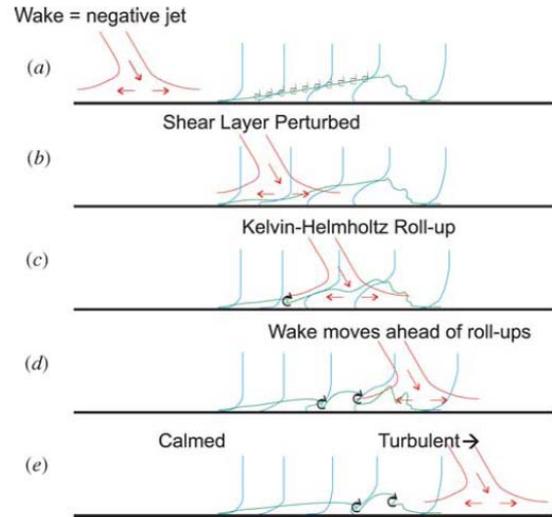


图 22 边界层形状因子及耗散系数的时空图 [244] (a) 形状因子；(b) 耗散系数

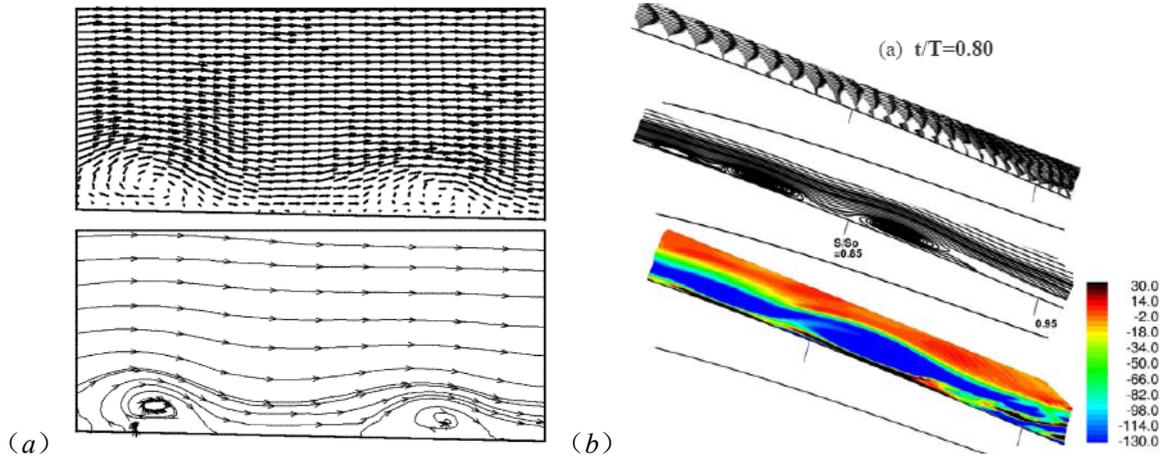
1.5.3 尾迹诱导的分离流转捩

如果雷诺数进一步降低，尾迹诱导的转捩不可能在分离点之前发生，尾迹与分离流将会产生非常复杂的相互作用，这正是大多数低雷诺数低压涡轮叶片吸力面边界层所面临的情形。

图 23 所示为尾迹与分离边界层相互作用中边界层形状因子的时空图 [245]，可以看出，相比图 22，整个过程更为复杂。图 24 给出了尾迹与分离泡相互作用的示意图 [245]，由 1.3.2 关于尾迹在叶栅通道内输运特性的分析可知，逆射流撞击到叶片上，来自逆射流的扰动，在尾迹中心的下游加速表面附近的流动，在上游减速流动。当尾迹到达分离区时，边界层的外区被加速，内区由于粘性的作用对外部扰动响应较慢，因此，分离区的剪切增强；尾迹从分离泡上面向下游输运，逆射流的法向分量使剪切层变形，分离剪切层的速度剖面不稳定，在尾迹扰动的触发下卷起旋涡 (roll-up vortex)，由于尾迹输运的速度大于卷起涡输运的速度，尾迹运动到卷起涡前面，继续扰动下游的分离剪切层，不断产生卷起涡；卷起涡快速破碎成湍流，导致边界层转捩。卷起涡和湍流边界层通过以后，出现寂静区，在寂静区的影响消失后，边界层再次分离，直到下一个尾迹的出现。

图 23 尾迹边界层作用的时空图（转捩在分离后）^[245]图 24 卷起机制的示意图^[245]

为了验证卷起涡结构的存在, Stieger等^[246]采用PIV对叶片后部吸力面边界层进行了测量,发现了两个卷起涡结构,如图25(a),在Sarkar等^[247]的大涡模拟中也发现了类似的卷起涡,如图25(b),可见,卷起涡结构确实存在。Stieger和Hodson^[245]研究发现,卷起涡的形成和破碎与高水平的湍动能产生、耗散相关,最终导致叶型损失,因此,应该尽量避免卷起涡的形成。

图 25 卷起涡结构的瞬态图画 (a) 实验测量结果^[246]; (b) 大涡模拟结果^[247]

1.6 本文的主要工作

本文采用大涡模拟方法,对低雷诺数条件下的低压涡轮叶栅流动进行了计算,通过模拟四种不同入口边界条件(定常来流,有背景湍流度的定常来流,周期性尾迹来流,有背景湍流度的周期性尾迹来流)的流动,深入细致的分析了非定常扰动环境中涡轮叶

片边界层的时空演化机制。围绕这一核心问题，各部分的内容安排如下：

第二章从有量纲的Navier-Stokes方程组出发，首先对其无量纲化，接下来对无量纲的方程进行滤波，由此得到滤波后的N-S方程组，根据已有的经验，对方程组进行了适当简化，然后采用动力涡粘模型对剩余的未知项逐一模化，由此得到封闭的大涡模拟控制方程组。

得到封闭的方程组以后，第三章对方程组的数值求解方法进行了介绍，包括数值方法的选取，控制方程的空间/时间离散格式，方程的定解条件，程序的并行策略，以及计算结果的后处理等内容，对程序执行中的某些具体问题，本章也给出了较为详细的说明。

为了验证新发展的大涡模拟程序，第四章选择了充分发展的槽道湍流和亚临界的圆柱绕流作为算例对程序进行校验。考核过程中，通过改变计算参数设置，对两个算例均进行了广泛的测试，总结了各类参数变化对计算结果的影响，校验结果表明：新程序具有较高的计算准确度，对不同流动问题的适应性强，程序健壮性好，可以用于低压涡轮叶栅流动的精细模拟。

在验证了程序的可靠性之后，第五章和第六章便是对低雷诺数低压涡轮叶栅流动的计算。第五章首先对这两章的数值模拟工作进行了总体说明，包括对照实验、四种计算工况、定解条件等的介绍，接下来重点分析了定常来流条件（定常来流，有背景湍流度的定常来流）下的计算结果。第六章则针对周期性尾迹作用下的叶栅流动（周期性尾迹来流，有背景湍流度的周期性尾迹来流），从时间平均、相位平均和瞬态流场等多个方面对计算结果进行了分析。

本文最后部分对论文所做工作进行了总结，在此基础上给出主要结论，并对将来可能的研究方向进行了展望。

第二章 控制方程与亚格子模型

从上一章的论述容易知道，目前大部分有关LES的研究工作都是针对不可压流动，由于其出现时间较早、研究相对充分，因而已发展的较为成熟；反观可压流的LES，由于发展历史短、实施难度大，到目前为止仍远未成熟，在亚格子模型、数值方法、边界条件等方面仍面临诸多挑战。尽管如此，对于叶轮机械内部的流动而言，采用可压流假设显然更为合理，而已有的研究工作也表明^{[235][248]}，对低压涡轮叶栅等具有复杂几何/物理边界条件的可压缩流动问题，目前已基本具备实施大涡模拟的条件，因此本文的研究采用了可压流假设。

对于可压缩牛顿流体，其控制方程是由质量、动量和能量方程组成的 Navier-Stokes 方程组，本章第一部分从有量纲的 N-S 方程出发，首先对其无量纲化，接下来对无量纲的方程进行滤波，由此得到滤波后的 N-S 方程；该方程组非常复杂，存在大量未知项，第二部分首先对未知项进行适当简化，然后采用亚格子模型逐项封闭，最后即可获得封闭的大涡模拟控制方程组。

2.1 滤波后的控制方程

2.1.1 Navier-Stokes 方程及其无量纲化

从文献 [14]容易得到直角坐标系下针对可压缩牛顿流体的控制方程（Navier-Stokes 方程组，其中上标*代表有量纲量）：

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\rho^* u_j^*) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* u_i^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\rho^* u_i^* u_j^*) = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\rho^* E^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\rho^* u_j^* E^*) = -\frac{\partial q_j^*}{\partial x_j^*} - \frac{\partial}{\partial x_j^*} (p^* u_j^*) + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\sigma_{ij}^* u_i^*) \quad (2.3)$$

式(2.1)~(2.3)分别为连续方程、动量方程和能量方程，其中 ρ^* 代表密度， u_i^* 代表速度向量， p^* 代表压力；而 E^* 为单位质量的总能量， σ_{ij}^* 为粘性应力张量， q_i^* 为热通量，其表达式分别为：

$$E^* = \varepsilon^* + u_j^* u_j^* / 2 \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij}^* = \mu^* \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \right) \quad (2.5)$$

$$q_i^* = -k^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*} \quad (2.6)$$

这里 $\varepsilon^* = c_v^* T^*$ 为单位质量的内能， T^* 代表温度，为了封闭方程组，还需要补充理想气体状态方程：

$$p^* = \rho^* R^* T^* \quad (2.7)$$

其中 $R^* = c_p^* - c_v^*$ 是理想气体常数， c_v^* 和 c_p^* 分别是定容比热和定压比热，对于上述有量纲的N-S方程组，通常需要对其进行无量纲化（nondimensionalize），其好处在于^{[249][250]}：一方面，无量纲化可以保证诸如雷诺数、马赫数这样的特征参数在计算中独立变化；另一方面，它也保证了流场变量取值通常具有 $O(1)$ 的量级。无量纲化的具体方式并不唯一，这里定义如下的无量纲变量：

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{L_0}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{u_0}, \quad T = \frac{T^*}{T_0}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 u_0^2}, \\ t &= \frac{t^*}{L_0 / u_0}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0}, \quad k = \frac{k^*}{\mu_0 c_p^*} = \frac{\mu}{\text{Pr}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中下标0代表特征物理量。将(2.8)代入到式(2.1)~(2.7)，经过整理可以得到无量纲的N-S方程组：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j E) = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (p u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) \quad (2.11)$$

式(2.9)~(2.11)分别为连续方程、动量方程和能量方程，而单位质量的总能量 E ，粘性应力张量 σ_{ij} ，热通量 q_i 的表达式分别变为：

$$E = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} T + u_j u_j / 2 \quad (2.12)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.13)$$

$$q_i = -\frac{\mu}{(\gamma-1)M_0^2 \text{Re Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.14)$$

其中最重要的无量纲参数包括雷诺数 Re ，马赫数 M_0 和普朗特数 Pr ，定义如下：

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu_0}, \quad M_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\gamma R T_0}}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_0 c_p^*}{k_0} \quad (2.15)$$

状态方程(2.7)变为：

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M_0^2} \quad (2.16)$$

这里 $\gamma = c_p^*/c_v^*$ 是比热比，对于空气，通常取 $\gamma = 1.4$ ，而粘性系数则根据 Sutherland 公式计算：

$$\mu = \frac{\mu^*}{\mu_0} = \frac{T^{3/2}(1+T_s/T_0)}{(T+T_s/T_0)} \quad (2.17)$$

如果介质是空气，通常取 $T_s = 110.4K$ ，当 $T_0 = 273.16K$ 时， $\mu_0 = 1.711 \times 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ 。此外，普朗特数 Pr 取 0.72。

2.1.2 滤波操作与滤波器

大涡模拟方法的基本思想在于区分流场中的大尺度和小尺度结构，大尺度直接计算，小尺度的效应则通过亚格子模型来模化，LES中，通常采用低通滤波来实现流场中大小尺度的分离。对于某一瞬态流场变量 $\phi(\mathbf{x}, t)$ ，定义滤波操作如下^[32]：

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (2.18)$$

这里的积分针对整个计算域，滤波函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{x})$ 满足归一化条件，即：

$$\int G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\mathbf{r} = 1 \quad (2.19)$$

通过滤波操作，流场变量 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 被分解为两部分之和： $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ ，其中 $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ 代表可分辨分量（大尺度量）， $\phi'(\mathbf{x}, t)$ 代表未分辨分量（小尺度量）。在一维情况下，滤波操作可以简化为：

$$\bar{\phi}(x) = \int G(x') \phi(x - x') dx' \quad (2.20)$$

对于一维的滤波函数 G ，最常见的滤波器有三种^[32]：盒式滤波器（box filter），谱截断滤波器（spectral cutoff filter）和高斯滤波器（Gaussian filter）。表 1 给出了这三种滤波器的数学定义，其中传递函数（transfer function） $\hat{G}(k)$ 是谱空间的滤波函数，通过对

物理空间的 $G(x)$ 进行Fourier变换得到^[37]。图 26 则给出了三种滤波器在物理空间和谱空间的示意图，容易看出，物理空间的盒式滤波器与谱空间的谱截断滤波器具有相似的图像，这二者分别针对在物理空间和谱空间实施的大涡模拟，具体的执行也非常简单，它们的缺点主要在于：将二者分别变换到谱空间/物理空间后，滤波器具有非局域特征（non-local）且在某些区间取负值。显然，高斯滤波器不存在这一问题，因而具有较好的性能，但它的具体执行却较为困难。因此，目前在实践中使用最多的仍然是盒式滤波器或谱截断滤波器，而对于较为复杂的流动问题，谱方法难于应用，LES通常在物理空间进行，这时普遍采用盒式滤波器。

表 1 三种常见的一维滤波器^{[32][37]}

名称	滤波函数 $G(x)$	传递函数 $\hat{G}(k)$
盒式滤波器	$\begin{cases} 1/\Delta, & \text{if } x \leq \Delta/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{\sin(k\Delta/2)}{k\Delta/2}$
谱截断滤波器	$\frac{\sin(\pi x/\Delta)}{\pi x/\Delta}$	$\begin{cases} 1, & \text{if } k \leq k_c, \quad k_c \equiv \pi/\Delta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
高斯滤波器	$\left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{6x^2}{\Delta^2}\right)$	$\exp\left(-\frac{k^2\Delta^2}{24}\right)$

上面介绍的三种滤波器均是一维的，但实际计算中通常需要处理三维问题，事实上，上述三个一维滤波器都很容易推广到三维，比如，一维的盒式滤波，在三维下成为以 $\Delta/2$ 为半径的球形滤波器。实际上，在推导大涡模拟控制方程的过程中，并不需要关心滤波器的具体形式，只需要假设滤波操作与时间/空间微分操作可交换即可，而有关滤波器的选择或者滤波操作的具体执行，将在下一章具体介绍。

2.1.3 滤波后的控制方程

将某一滤波操作（以 $\overline{\quad}$ 表示，滤波器宽度为 Δ ）应用到无量纲的N-S方程组(2.9)~(2.11)，假设滤波操作与时间/空间微分操作可交换顺序，于是滤波后的方程组写为：

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j}) = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i u_j}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho E}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho u_j E}) = -\frac{\partial \overline{q_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\sigma_{ij} u_i}) \quad (2.23)$$

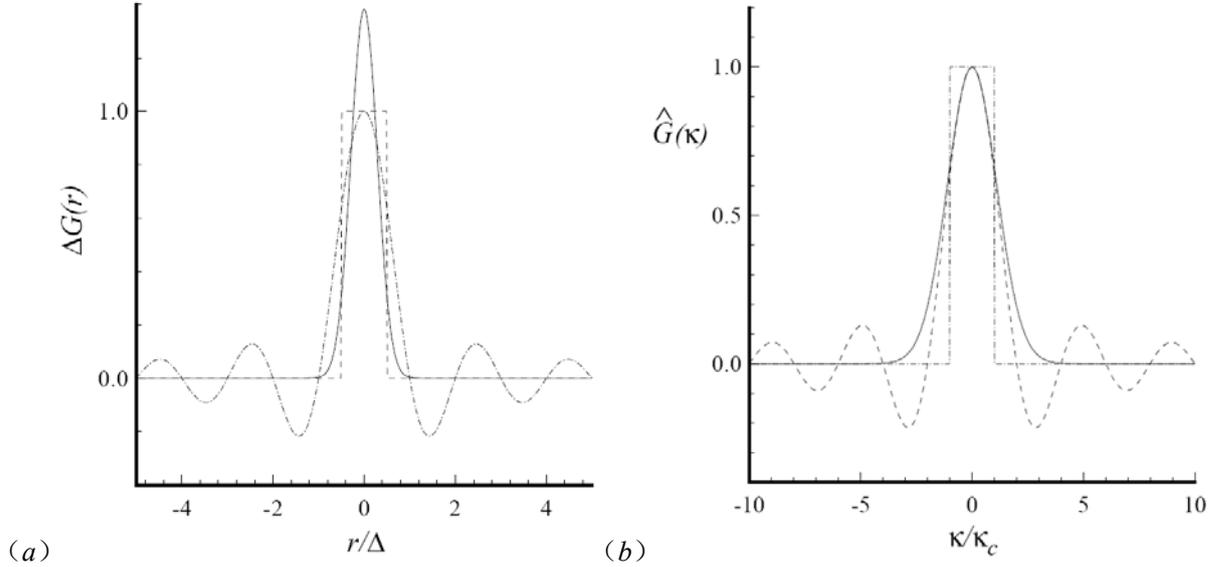


图 26 三种常见一维滤波器的示意图，虚线为盒式滤波器，点划线为谱截断滤波器，实线为高斯滤波器 (a) 物理空间；(b) 谱空间^[32]

对于可压缩流动，为了简化上面的方程组，对任意变量 ϕ 定义质量加权的 Favre 滤波 (以 $\tilde{}$ 表示) 如下^{[33][79]}:

$$\tilde{\phi} = \overline{\rho \phi} / \bar{\rho} \quad (2.24)$$

于是有:

$$\overline{\rho u_i} = \bar{\rho} \tilde{u}_i, \quad \overline{\rho T} = \bar{\rho} \tilde{T}, \quad \overline{\rho u_i u_j} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (2.25)$$

将上述式子代入方程组(2.21)~(2.23)，整理后可以得到滤波后的 N-S 方程组:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E}) &= -\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{p} \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) \\ -\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E} - \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E}) &- \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{q}_j - \tilde{q}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p u_j} - \bar{p} \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\sigma_{ij} u_i} - \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) \end{aligned} \quad (2.28)$$

其中:

$$\tau_{ij} = \bar{\rho}(\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j) \quad (2.29)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \overline{\frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)} \quad (2.30)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\mu(\tilde{T})}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.31)$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} \tilde{T} + \widetilde{u_j u_j} / 2 \quad (2.32)$$

$$\bar{q}_i = - \overline{\frac{\mu}{(\gamma-1)M_0^2} \frac{\partial T}{\text{Re Pr} \partial x_i}} \quad (2.33)$$

$$\tilde{q}_i = - \frac{\mu(\tilde{T})}{(\gamma-1)M_0^2} \frac{\partial \tilde{T}}{\text{Re Pr} \partial x_i} \quad (2.34)$$

而滤波后的状态方程也变为：

$$\bar{p} = \frac{\bar{\rho} \tilde{T}}{\gamma M_0^2} \quad (2.35)$$

2.2 亚格子模型

从滤波后的控制方程容易看出，相比不可压流动，可压流LES的模化难度更大，事实上，不可压流只存在唯一的不封闭项——即动量方程中的亚格子应力项；但对于可压缩流动而言，动量方程中就有两项需要处理，而增加的能量方程则更为复杂：能量方程本身存在多种形式，如可以求解内能、焓或者总能量方程，采用不同形式导致不同的未知项，它们都需要逐一封闭^[116]。

由于可压流LES本身难度大、发展历史短，目前使用的大部分亚格子模型都是通过和不可压模型类比得到的，是不可压模型的变密度扩展（variable-density extension），对于马赫数不是太高的流动，已有的工作表明这样处理是合适的^[33]，而大部分有关不可压模型的特征对其可压缩版本依然有效。

对于不可压流动，目前常用的亚格子模型包括Smagorinsky涡粘模型、尺度相似模型、混合模型、动力涡粘模型（dynamic Smagorinsky model）以及动力混合模型（dynamic mixed model）^[95]。Smagorinsky模型是最早出现的亚格子模型^[80]，它的主要缺点在于：模型本身是纯耗散的，在某些情况下，如湍流边界层的近壁区以及层流到湍流的过渡区，该模型表现出过大的耗散，需要引入经验的衰减函数或恰当的转捩模型来近似表征亚格子应力的真实变化，也就是说，该模型过多的依赖于经验系数。尺度相似模型则出现在

上世纪 80 年代初^[86]，先验检测（*priori testing*）表明该模型计算的亚格子应力与真实的亚格子应力统计相关性很好，但在实际应用中发现模型的耗散过小，往往导致计算发散。实际应用中，通常将Smagorinsky模型和尺度相似模型结合在一起，这就是所谓的混合模型^[86]，该模型既有足够的耗散，又有和真实亚格子应力的良好相关性，通常可以得到比单独使用一个模型更好的计算结果，但混合模型仍继承了Smagorinsky模型的缺点，即过多的依赖于经验系数。动力模型就是在这种背景下产生的，该模型本身并不提出新的模型，而是依赖于一个已有的基准模型，然后用动力学的途径动态计算基准模型中的系数，如果分别使用Smagorinsky模型和混合模型作为基准模型，就可以得到动力涡粘模型^{[96][97]}和动力混合模型^[98]。动力模型的好处在于，它消除了亚格子模型中经验参数取值的任意性，根据流场自身的局部特征动态计算模型系数，实践表明，动力模型可以正确给出近壁处亚格子应力的渐进特性，也可以较好的处理流动中的转捩现象。

Vreman等^[251]使用弱可压的时间演化混合层作为算例，结合滤波后的直接数值模拟结果，对一系列的亚格子模型进行了考核，他们发现：所有亚格子模型中，动力模型的结果普遍优于非动力模型；而在动力模型中，动力混合模型又稍好于动力涡粘模型。对于本文研究的问题，虽然使用动力混合模型可能获得更好的结果，但考虑到该模型相对复杂，于是作者使用了应用最为广泛的动力涡粘模型；鉴于本文的算例都存在一个或多个统计均匀方向，计算模型系数时，均沿这些方向进行了平均，也就是说，这里并没有使用局部化的动力模型^{[99][100]}或拉格朗日型动力模型^[101]。

2.2.1 动量方程的亚格子模型

对于动量方程(2.27)，有两项需要模化， $\tau_{ij} = \bar{\rho}(\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$ 和 $(\bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})$ 。Vreman等^[252]的先验评估研究表明，对马赫数小于 1.2 的混合层算例，有如下估计：

$$O\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})\right) \approx \frac{1}{100} O\left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right) \quad (2.36)$$

因此 $\partial(\bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})/\partial x_j$ 项通常可以忽略，文献 [253][254][116][117]均采用了这一近似。而对于亚格子应力项 τ_{ij} ，则通过动力涡粘模型封闭，以下先介绍Smagorinsky模型，然后推导以它作为基准模型的动力涡粘模型。

2.2.1.1 Smagorinsky 涡粘模型

对于亚格子应力 $\tau_{ij} = \bar{\rho}(\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$ ，将其分解为两部分之和， $\tau_{ij} = \tau_{ij}^d + \delta_{ij} \tau_{kk}/3$ ，这里 τ_{ij}^d 是亚格子应力的偏分量（*deviatoric part*），而 $\delta_{ij} \tau_{kk}/3$ 则是其各向同性分量（*isotropic*

part)。不可压流的LES中，各向同性分量通常被合并到压力项而不再模化，但可压缩流动却不能这样处理，于是这两个部分需要分别模化^{[112][113]}。

Smagorinsky 模型基于 Boussinesq 的涡粘性假设，对于偏分量 τ_{ij}^d ，定义亚格子涡粘性系数 ν_{sgs} ， τ_{ij}^d 被假设与可分辨的应变变化率张量成正比：

$$\tau_{ij}^d = \tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2\bar{\rho}\nu_{sgs} \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{S}_{kk} \right) \quad (2.37)$$

这里 $\tilde{S}_{ij} = (\partial\tilde{u}_i/\partial x_j + \partial\tilde{u}_j/\partial x_i)/2$ ，是可分辨的应变变化率张量。亚格子粘性系数 ν_{sgs} 则由 $|\tilde{S}| = (2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij})^{1/2}$ 和特征长度尺度 ℓ 计算， $\nu_{sgs} = \ell^2 |\tilde{S}|$ ， ℓ 被假设和滤波器宽度 Δ 成正比， $\ell = C_s \Delta$ ， C_s 是 Smagorinsky 常数。于是可以得到：

$$\nu_{sgs} = \ell^2 |\tilde{S}| = (C_s \Delta)^2 |\tilde{S}| \quad (2.38)$$

将上式代入式(2.37)，偏分量 τ_{ij}^d 的表达式变成：

$$\tau_{ij}^d = \tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2\bar{\rho} (C_s \Delta)^2 |\tilde{S}| \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{S}_{kk} \right) \quad (2.39)$$

设 $C = C_s^2$ ，于是有：

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2C\bar{\rho}\Delta^2 |\tilde{S}| \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{S}_{kk} \right) \quad (2.40)$$

对各向同性分量 $\delta_{ij}\tau_{kk}/3$ ，Yoshizawa^{[111][112]}建议如下模化：

$$\tau_{kk} = 2\bar{\rho}C_l\Delta^2 |\tilde{S}|^2 \quad (2.41)$$

经验系数的取值为 $C_s = 0.16$ ， $C_l = 0.09$ ，事实上，对于不同的流动，最优的经验系数并不一致，这一情形在近壁流动中最为明显：为了表征亚格子应力在壁面附近的渐进特性， $C_s\Delta$ 需要变为 $C_s\Delta(1 - \exp(-y^+ / A^+))^{1/2}$ 或者 $C_s\Delta(1 - \exp(-y^+ / A^+))^{[255]}$ ，这里 A^+ 为常数，一般取 $A^+ = 26$ ；对于系数 C_l ，也应该按类似的方式操作。

2.2.1.2 动力涡粘模型

动力模型的基本思想来源于高雷诺数湍流在惯性子区的尺度不变性^[95]：例如，2.1节中对动量方程进行滤波（滤波尺度 Δ ）得到滤波后的动量方程(2.27)，其亚格子应力项为 τ_{ij} ，在此基础上选取第二个尺度 $\hat{\Delta}$ （通常取 $\hat{\Delta} > \Delta$ ）对方程(2.22)进行二次或检验滤波（test filtering），得到第二个亚格子应力项 T_{ij} 。对于这两个亚格子应力，分别使用 Smagorinsky 模型封闭，由于尺度不变性，假设其模型系数相等，将它们代入到 Germano 等式中^[96]，可以得到关于模型系数的方程，通过求解该方程就实现了对模型系数的动

态计算。下面即按照这一思想推导动力涡粘模型系数的表达式。

将Smagorinsky模型的公式(2.40)和(2.41)改写如下：

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -C_2 \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| (\tilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{S}_{kk}) = C \alpha_{ij} \quad (2.42)$$

$$\tau_{kk} = C_1 2 \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}|^2 = C_1 \alpha \quad (2.43)$$

其中：

$$\alpha_{ij} = -2 \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| (\tilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{S}_{kk}) \quad (2.44)$$

$$\alpha = 2 \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}|^2 \quad (2.45)$$

对方程(2.22)进行检验滤波，滤波操作以 $\widehat{\quad}$ 表示，滤波器宽度为 $\hat{\Delta}$ ，假设滤波操作与时间/空间微分操作可交换顺序，容易得到：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\rho u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{\rho u_i u_j}) = -\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \widehat{\sigma_{ij}}}{\partial x_j} \quad (2.46)$$

定义：

$$\widehat{f} = \widehat{\rho f} / \widehat{\rho} \quad (2.47)$$

代入式(2.46)，经过适当变换可以得到二次滤波后的动量方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\widehat{\rho \tilde{u}_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j}) = -\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \widehat{\tilde{\sigma}_{ij}}}{\partial x_j} - T_{ij} + \frac{\partial (\widehat{\sigma_{ij}} - \widehat{\tilde{\sigma}_{ij}})}{\partial x_j} \quad (2.48)$$

其中 T_{ij} 为二次滤波后的亚格子应力项：

$$T_{ij} = \widehat{\rho u_i u_j} - \widehat{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} \quad (2.49)$$

$$\widehat{\tilde{\sigma}_{ij}} = \frac{\mu(\hat{T})}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.50)$$

对比式(2.48)和(2.27)，容易发现，两个方程在形式上是完全一致的。引入Germano等式^[96]：

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau_{ij}} \quad (2.51)$$

已知 $\tau_{ij} = \bar{\rho} (\widehat{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$ ， $\widehat{\tau_{ij}}$ 即是对 τ_{ij} 进行检验滤波：

$$\widehat{\tau_{ij}} = \widehat{\bar{\rho} (\widehat{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)} = \widehat{\rho u_i u_j} - \widehat{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} = \left(\widehat{\rho u_i u_j} - \widehat{\rho u_i \rho u_j} / \widehat{\rho} \right) \quad (2.52)$$

而对于 T_{ij} ，显然有：

$$T_{ij} = \overline{\rho u_i u_j} - \widehat{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} = \widehat{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \widehat{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} = \overline{\rho u_i u_j} - \overline{\rho u_i \rho u_j} / \widehat{\rho} \quad (2.53)$$

将式(2.52)和(2.53)代入式(2.51)，于是有：

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau_{ij}} = \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \widehat{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} = \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho u_i \rho u_j} / \widehat{\rho} = \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \widehat{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} / \widehat{\rho} \quad (2.54)$$

观察 L_{ij} 的表达式可以发现， L_{ij} 中包含的都是已知项，也就是说，知道某一时刻的瞬态流场以后， L_{ij} 可以被直接计算出来（当然，这里需要对已知的瞬态流场变量进行适当的滤波运算）。

对于二次滤波的亚格子应力项 T_{ij} ，同样使用Smagorinsky模型封闭，类比 τ_{ij} 的表达式(2.42)和(2.43)，容易得到：

$$T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} T_{kk} = -C_2 \widehat{\rho} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| (\widehat{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widehat{S}_{kk}) = C \beta_{ij} \quad (2.55)$$

$$T_{kk} = C_1 2 \widehat{\rho} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}|^2 = C_1 \beta \quad (2.56)$$

其中：

$$\beta_{ij} = -2 \widehat{\rho} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| (\widehat{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widehat{S}_{kk}) \quad (2.57)$$

$$\beta = 2 \widehat{\rho} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}|^2 \quad (2.58)$$

这里 $\widehat{S}_{ij} = (\partial \widehat{u}_i / \partial x_j + \partial \widehat{u}_j / \partial x_i) / 2$ ， $|\widehat{S}| = (2 \widehat{S}_{ij} \widehat{S}_{ij})^{1/2}$ 。将上述用Smagorinsky模型封闭后的亚格子应力 τ_{ij} 和 T_{ij} 代入Germano等式(2.54)，首先考虑各向同性分量：

$$L_{kk} = T_{kk} - \widehat{\tau_{kk}} \Rightarrow \overline{\rho \tilde{u}_k \tilde{u}_k} - \widehat{\rho \tilde{u}_k \tilde{u}_k} / \widehat{\rho} = C_1 (\beta - \widehat{\alpha}) = C_1 (2 \widehat{\rho} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}|^2 - 2 \Delta^2 \overline{\rho} |\widehat{S}|^2) \quad (2.59)$$

于是可以得到 C_1 的计算公式：

$$C_1 = \frac{\langle L_{kk} \rangle}{\langle \beta - \widehat{\alpha} \rangle} = \frac{\langle \overline{\rho \tilde{u}_k \tilde{u}_k} - \widehat{\rho \tilde{u}_k \tilde{u}_k} / \widehat{\rho} \rangle}{\langle 2 \widehat{\rho} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}|^2 - 2 \Delta^2 \overline{\rho} |\widehat{S}|^2 \rangle} = \frac{1}{2 \Delta^2} \frac{\langle \overline{\rho \tilde{u}_k \tilde{u}_k} - \widehat{\rho \tilde{u}_k \tilde{u}_k} / \widehat{\rho} \rangle}{\langle \delta^2 \widehat{\rho} |\widehat{S}|^2 - \overline{\rho} |\widehat{S}|^2 \rangle} \quad (2.60)$$

理论上，对计算域中的每一个网格点，均可以得到一个系数 $C_1 = L_{kk} / (\beta - \widehat{\alpha})$ ，但实践表明如果直接使用该公式会导致计算不稳定，于是这里引入 $\langle \cdot \rangle$ 代表沿流动的统计均匀方向所进行的平均；上式中的 $\delta = \widehat{\Delta} / \Delta$ ，即两个滤波器尺度的比值。接下来考虑偏分量：

$$L_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk} = C (\beta_{ij} - \widehat{\alpha}_{ij}) = C M_{ij} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \beta_{ij} - \widehat{\alpha}_{ij} = -2\widehat{\rho}\widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}| \left(\widehat{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widehat{S}_{kk} \right) + 2\Delta^2 \overline{\rho} |\widetilde{S}| \left(\widetilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widetilde{S}_{kk} \right) \\
&= 2\Delta^2 \left(-\delta^2 \widehat{\rho} |\widehat{S}| \left(\widehat{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widehat{S}_{kk} \right) + \overline{\rho} |\widetilde{S}| \left(\widetilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widetilde{S}_{kk} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

方程 (2.61) 是一个张量方程，但需要求解的未知数却只有一个，方程超定。为了计算系数 C ，Lilly^[97] 建议 C 的取值应该使方程的均方误差最小化，即：

$$\frac{\partial e_{ij} e_{ij}}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C} \left(L_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk} - CM_{ij} \right)^2 = 0 \tag{2.63}$$

于是可以得到 C 的计算公式：

$$C = \frac{\left\langle \left(L_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk} \right) M_{ij} \right\rangle}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle} \tag{2.64}$$

同 C_l 的公式一样，为了保证计算的稳定性，仍然沿流动的统计均匀方向进行了平均。

2.2.2 能量方程的亚格子模型

对于能量方程(2.28)，进行适当变形可以得到^{[116][117]}：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E}) &= -\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p} \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) \\
&- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\overline{\rho}}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} (\widetilde{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T}) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\overline{\rho}}{2} (\widetilde{u_j u_k u_k} - \tilde{u}_j \widetilde{u_k u_k}) \right] \\
&- \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{(\gamma-1)M_0^2 \text{RePr}} \left(\overline{\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}} - \mu(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right) \\
&- \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p u_j} - \overline{p} \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma_{ij} u_i} - \overline{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

容易看出，上述方程中存在很多未知项，需要逐项进行封闭。首先，对滤波后的总能量 \tilde{E} ，其表达式变为：

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} \tilde{T} + \widetilde{u_j u_j} / 2 \\
&= \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} \tilde{T} + \frac{1}{2} \tilde{u}_j \tilde{u}_j + \frac{1}{2} (\widetilde{u_j u_j} - \tilde{u}_j \tilde{u}_j) \\
&= \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} \tilde{T} + \frac{1}{2} \tilde{u}_j \tilde{u}_j + \frac{1}{2} \frac{\tau_{kk}}{\overline{\rho}}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

其次, $\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{q}_j - \tilde{q}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{(\gamma-1)M_0^2 \text{RePr}} \left(\overline{\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}} - \mu(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right)$ 项可以忽略, 而对于其他两项, 合并后得到:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\bar{\rho}}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} (\widetilde{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T}) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p u_j} - \bar{p} \tilde{u}_j) \\ & = -\frac{1}{(\gamma-1)M_0^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} (\widetilde{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T}) \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

于是, 式(2.65)简化为如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E}) & = -\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) \\ & - \frac{1}{(\gamma-1)M_0^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} (\widetilde{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T}) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\bar{\rho}}{2} (\widetilde{u_j u_k u_k} - \tilde{u}_j \tilde{u}_k \tilde{u}_k) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma_{ij} u_i} - \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) \end{aligned} \quad (2.68)$$

上述方程中存在三个未知项, 分别被称为亚格子热通量 (SGS heat flux) 项 Q_j 、亚格子湍流扩散 (SGS turbulent diffusion) 项 J_j 以及亚格子粘性扩散 (SGS viscous diffusion) 项 D_j , 它们的表达式如下:

$$Q_j = \bar{\rho} (\widetilde{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T}) \quad (2.69)$$

$$J_j = \frac{\bar{\rho}}{2} (\widetilde{u_j u_k u_k} - \tilde{u}_j \tilde{u}_k \tilde{u}_k) \quad (2.70)$$

$$D_j = \overline{\sigma_{ij} u_i} - \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i \quad (2.71)$$

Vreman等^[252]的研究工作表明, 对马赫数范围在 0.2~1.2 的可压缩剪切层流动而言, $\partial(\bar{q}_j - \tilde{q}_j)/\partial x_j$ 和 $\partial(\overline{\sigma_{ij} u_i} - \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i)/\partial x_j$ 两项比方程中的其他项小 2~3 个数量级, 而文献 [117] 也认为 $\partial(\overline{\sigma_{ij} u_i} - \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i)/\partial x_j$ 项大约为 $1/(\gamma-1)M_0^2 \partial Q_j/\partial x_j$ 项的 5%, 因此, 在这里忽略了亚格子粘性扩散 D_j , 而只对亚格子热通量 Q_j 和亚格子湍流扩散 J_j 进行封闭。

2.2.2.1 亚格子热通量

对于亚格子热通量项 $Q_j = \bar{\rho} (\widetilde{u_j T} - \tilde{u}_j \tilde{T})$, 采用涡扩散模型封闭:

$$Q_j = -\frac{\bar{\rho} \nu_{\text{sgs}}}{\text{Pr}_{\text{sgs}}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -C \frac{\Delta^2 \bar{\rho} |\tilde{S}|}{\text{Pr}_{\text{sgs}}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.72)$$

其中 ν_{sgs} 代表亚格子粘性系数, C 的值已经通过(2.64)计算得到。 Pr_{sgs} 代表亚格子普朗特数, 可以根据经验提前给定, 也可以采用动力模型计算, 其推导过程与 2.2.1.2 类似, 为节约篇幅, 这里只给出结果:

$$\text{Pr}_{\text{sgs}} = \frac{C \langle T_k T_k \rangle}{\langle K_j T_j \rangle} \quad (2.73)$$

T_j 和 K_j 的定义分别为:

$$T_j = -\hat{\Delta}^2 \hat{\rho} \left| \hat{S} \right| \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j} + \Delta^2 \bar{\rho} \left| \hat{S} \right| \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \Delta^2 \left(-\delta^2 \hat{\rho} \left| \hat{S} \right| \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j} + \bar{\rho} \left| \hat{S} \right| \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) \quad (2.74)$$

$$K_j = \overline{\hat{\rho} \tilde{u}_j \tilde{T}} - \frac{\overline{\rho u_j \rho T}}{\hat{\rho}} \quad (2.75)$$

2.2.2.2 亚格子湍流扩散

对于亚格子湍流扩散项 $J_j = \frac{\bar{\rho}}{2} (\overline{u_j u_k u_k} - \tilde{u}_j \overline{u_k u_k})$, 按照Knight等^[256]的建议:

$$J_j \approx \tilde{u}_k \tau_{jk} \quad (2.76)$$

这里的 τ_{jk} 按前述动力涡粘模型计算。

2.2.3 大涡模拟的控制方程组

上面两节分别完成了对动量方程和能量方程的封闭, 由此可以将大涡模拟的控制方程组写为如下形式:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j) = 0 \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\sigma}_{ij} - \tau_{ij}) \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{E}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{p}) \tilde{u}_j = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{q}_j + \frac{1}{(\gamma-1)M_0^2} Q_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{u}_i (\tilde{\sigma}_{ij} - \tau_{ij}) \quad (2.79)$$

补充状态方程:

$$\bar{p} = \frac{\bar{\rho} \tilde{T}}{\gamma M_0^2} \quad (2.80)$$

上述控制方程组的积分形式为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{Q} \cdot dV + \oint_{\partial V} (\mathbf{F} - \mathbf{F}^v) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.81)$$

式中各项定义如下:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_1 \\ \bar{\rho}\tilde{u}_2 \\ \bar{\rho}\tilde{u}_3 \\ \bar{\rho}\tilde{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_1\tilde{u} + \bar{p}\mathbf{i} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_2\tilde{u} + \bar{p}\mathbf{j} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_3\tilde{u} + \bar{p}\mathbf{k} \\ (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{11}\mathbf{i} + T_{12}\mathbf{j} + T_{13}\mathbf{k} \\ T_{21}\mathbf{i} + T_{22}\mathbf{j} + T_{23}\mathbf{k} \\ T_{31}\mathbf{i} + T_{32}\mathbf{j} + T_{33}\mathbf{k} \\ f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

其中:

$$f_1 = T_{11}\tilde{u}_1 + T_{21}\tilde{u}_2 + T_{31}\tilde{u}_3 - \left(\tilde{q}_1 + \frac{1}{(\gamma-1)M_0^2}Q_1\right)$$

$$f_2 = T_{12}\tilde{u}_1 + T_{22}\tilde{u}_2 + T_{32}\tilde{u}_3 - \left(\tilde{q}_2 + \frac{1}{(\gamma-1)M_0^2}Q_2\right) \quad (2.83)$$

$$f_3 = T_{13}\tilde{u}_1 + T_{23}\tilde{u}_2 + T_{33}\tilde{u}_3 - \left(\tilde{q}_3 + \frac{1}{(\gamma-1)M_0^2}Q_3\right)$$

$$T_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \tau_{ij} \quad (2.84)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\mu(\tilde{T})}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.85)$$

$$\tau_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} - C_2 \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tilde{S}_{kk} \right) \quad (2.86)$$

$$\tau_{kk} = C_1 2 \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}|^2 \quad (2.87)$$

$$\tilde{q}_j = - \frac{\mu(\tilde{T})}{(\gamma-1)M_0^2 \text{Re Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.88)$$

$$Q_j = - \frac{\bar{\rho} v_{sgs}}{\text{Pr}_{sgs}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -C \frac{\Delta^2 \bar{\rho} |\tilde{S}|}{\text{Pr}_{sgs}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.89)$$

此外还有:

$$\tilde{E} = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_0^2} \tilde{T} + \frac{1}{2} \tilde{u}_j \tilde{u}_j + \frac{1}{2} \frac{\tau_{kk}}{\bar{\rho}} \quad (2.90)$$

对于上述控制方程组,一共有三个系数需要使用动力模型计算: C 、 C_1 和 Pr_{sgs} , 它们的计算公式分别为:

$$C = \frac{\left\langle \left(L_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} L_{kk} \right) M_{ij} \right\rangle}{\langle M_{kl} M_{kl} \rangle} \quad (2.91)$$

$$C_l = \frac{\langle L_{kk} \rangle}{\langle \beta - \hat{\alpha} \rangle} \quad (2.92)$$

$$\text{Pr}_{\text{sgs}} = \frac{C \langle T_k T_k \rangle}{\langle K_j T_j \rangle} \quad (2.93)$$

第三章 数值求解方法

在获得封闭的大涡模拟控制方程组以后，本章对该方程组的数值求解方法进行介绍，主要内容包括：数值方法的选取，控制方程组的空间/时间离散，方程的定解条件，程序的并行策略以及计算结果的后处理。在程序的执行中有一些具体问题需要特别关注，本章也在 3.7 节对这些问题的处理方法给出了较为详细的说明。

3.1 数值方法的选取

对于任意具体的流动问题，在选择了恰当模型方程后（如本文的大涡模拟控制方程组），接下来首先需要解决的问题是：划定计算域，使用恰当的网格生成方法将物理空间离散为一系列的网格单元，此后才能考虑模型方程的空间和时间离散^{[38][257]}。尽管事实上，网格生成与方程离散这两个过程往往交织在一起，需要协同考虑（比如，选择了有限差分方法就必须采用结构化网格），但前者对数值模拟工作的重要性显然是毋庸置疑的。按照一般的标准，计算域内的离散网格可以分为结构化网格和非结构网格两类：结构化网格求解效率高、容易获得高阶精度，通过使用贴体网格能够很好的分辨近壁边界层，但在处理复杂几何形状时通常要借助于多块网格，导致网格生成过程消耗大量时间；非结构网格对复杂几何形状具有很好的适应性，网格生成快速且易于实现自动化，也易于实现计算域的局部加密，但通常来讲其计算精度较低，特别是对于存在强剪切的近壁流动，非结构网格很难实现对边界层的精确分辨。本文的主要工作是利用大涡模拟研究非定常环境中的低压涡轮叶栅流动，要想深刻认识涡轮叶片边界层的时空演化机制，首先需要保证计算网格能够准确的分辨流场、尤其是涡轮叶片的近壁区域。考虑到结构化网格和非结构网格自身的特点，作者首先确定采用多块结构化网格离散计算域：这和目前绝大多数叶轮机械CFD代码的选择一致，有利于拓展程序将来的应用范围，此外，块结构化的架构也有利于通过计算域分解实现程序的并行。

接下来考虑控制方程组的空间离散。CFD技术经过几十年的发展，出现了种类繁多的数值方法，但是对于LES或DNS而言，目前主要使用的仍是有限差分或有限体积方法。有限差分法出现时间最早，容易获得高阶精度，但通常其离散过程不能保证守恒性，格式健壮性较差，应用到复杂计算域的难度也较大，最近十多年，随着一系列新格式（如高阶紧致格式^[258]、高阶频散相关保持格式^[259]、高阶低频散低耗散格式^[152]）的出现，有限差分法在DNS/CAA/LES等领域均获得了广泛的应用，且其对复杂计算域的适应能

力也不断增强^{[139][260]}。有限体积法源于对积分型控制方程组的直接离散，其最大优点在于离散过程自动保证守恒性，该方法对复杂计算域有着很强的处理能力，是目前绝大多数叶轮机械CFD代码的选择，但相比有限差分，有限体积很难获得高阶的计算精度。尽管在目前阶段，对于本文研究的问题，高阶有限差分有能力进行处理，且单纯从格式的精度看，可能获得比有限体积更好的结果，但考虑到程序现在及将来的应用背景（叶轮机械），作者仍然选用有限体积法离散控制方程，期望在有限体积的框架内发展一整套大涡模拟程序，用于叶轮机械内部复杂流动现象的机理研究。

控制方程组时间离散的选项也非常多，但基于以下考虑，作者选择了最简单的显式多步 Runge-Kutta 法：首先，对于显式格式，计算的时间步长由流动所需要分辨的最小时间尺度以及格式的稳定性（CFL 条件）共同决定，在 uRANS 中，这两者差别很大，但在 LES 或者 DNS 中，由于需要分辨流场中的小尺度结构，两者的差别减小，因此应用隐式格式的需求不如 uRANS 强烈；其次，相比隐式格式，采用显式时间推进时，程序的并行容易实现，且编程的难度也大大降低。

在选定上述数值方法的基础上，作者发展了一个采用多块结构化网格、并行化的可压缩流动大涡模拟求解器——MPLES（Multiblock Parallel Large-eddy Simulation，见附录A），该程序具有以下特点：第一，计算网格是界面匹配的多块结构化网格，控制方程采用网格中心的有限体积法离散，时间推进为显式多步的Runge-Kutta法；第二，通过计算域分解实现程序的并行，通过对网格块的适当剖分与组合实现负载平衡；第三，网格块界面的数据交换也被定义为一类边界条件，同物理边界一样通过两层虚网格实现数据的更新。

3.2 控制方程组的空间离散

目前，绝大多数求解Euler或N-S方程的数值方法均利用直线法（method of lines）离散控制方程——即对方程中的空间和时间项分别进行处理，其主要好处在于：可以按照具体流动问题的要求，对空间和时间导数项选用不同精度的离散格式进行逼近，大大增加了数值方法的灵活性^[257]。MPLES求解控制方程时也选用了该方法，由此本节主要考虑方程组的空间离散格式，其时间离散格式则在下一节给出。

对于任意具体的流动问题，首先划定计算域，使用恰当的网格生成方法将物理空间离散为一系列的网格单元——MPLES中使用了结构化的六面体网格。采用网格中心的有限体积法离散积分形式的大涡模拟控制方程组 (2.81)，将该方程应用到任意一个六面体

网格单元 (i, j, k) 上, 可以得到:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}_{i,j,k}V_{i,j,k}) + \sum_{n=1}^6 \mathbf{F}_n \cdot \Delta \mathbf{S}_n = \sum_{n=1}^6 \mathbf{F}_n^v \cdot \Delta \mathbf{S}_n \quad (3.1)$$

其中 $V_{i,j,k}$ 代表网格单元 (i, j, k) 的体积, $\mathbf{Q}_{i,j,k}$ 则是流场变量 \mathbf{Q} 在网格单元上的体积平均值, 存储在单元中心, 其定义如下:

$$\mathbf{Q}_{i,j,k} = \frac{\int_{V_{i,j,k}} \mathbf{Q} \cdot dV}{V_{i,j,k}} \quad (3.2)$$

$\mathbf{F}_n \cdot \Delta \mathbf{S}_n (n=1,6)$ 和 $\mathbf{F}_n^v \cdot \Delta \mathbf{S}_n (n=1,6)$ 分别代表六面体各个面上对流通量和粘性通量的面积分, 对流通量和粘性通量的离散就是要利用各网格中心的 $\mathbf{Q}_{i,j,k}$ 将网格面上的 \mathbf{F}_n 和 \mathbf{F}_n^v 表示出来。

3.2.1 对流通量的计算

已有的关于大涡模拟的大量研究工作都表明: 对于显式使用亚格子模型的计算, 要想获得准确的模拟结果, 控制方程中对流项的离散必须选用无耗散的中心格式而避免使用迎风格式^[261]。由于MPLES中的亚格子模型是动力涡粘模型, 因此对流通量的离散选用了偏斜对称型的中心格式^[262], 但中心格式在无耗散特性容易在流场中产生非物理的数值振荡 (“2- Δ ” 振荡), 污染计算结果, 甚至使计算发散。解决该问题最常见的方法是使用Jameson等人提出的人工粘性格式^[263], 在本文第四章的程序验证工作中, 槽道湍流和圆柱绕流算例的模拟均使用了Jameson格式的改进版本——矩阵人工粘性^[264], 取得了较好的计算结果。但在第五章和第六章关于低压涡轮叶栅的模拟中, 作者发现, 即便加入了矩阵人工粘性 (甚至将人工粘性系数取得很大), 流场中某些区域仍然出现明显的 “2- Δ ” 振荡, 严重污染计算结果。为解决该问题, 作者尝试在叶栅模拟中不再添加人工粘性项, 而是使用Bogey和Bailly等人推导的显式滤波器^{[152][153]}, 每隔一定的时间步对流场变量进行一次滤波, 期望由此消除流场中的非物理振荡, 计算结果表明, 该方法效果很好, 能够有效的去除 “2- Δ ” 振荡。因此, 在最后两章对低压涡轮叶栅的模拟中, 使用了显式滤波方法而舍弃了人工粘性格式。

3.2.1.1 偏斜对称格式

Kravchenko和Moin在有关大涡模拟数值误差的研究工作中发现^[106]: N-S方程的对流项可以被表示成散度型 (divergence form)、对流型 (convective form)、偏斜对称型 (skew-symmetric form) 等多种形式, 尽管从微分方程的角度看, 它们是完全等价的,

但如果采用不同的形式进行方程离散，则离散后的对流项性质并不相同，其中偏斜对称型的离散具有内在的去混淆（de-aliasing）特性。以此为基础，Ducros等人针对可压缩流动，在有限差分和有限体积的框架内推导了二阶和四阶的偏斜对称型中心格式^[262]，设 $F = UV$ ，则二阶的有限差分/有限体积格式分别表示为：

$$F_{o2,i+1/2}^{skew,FD} = \frac{1}{4}(U_i + U_{i+1})(V_i + V_{i+1}) \quad (3.3)$$

$$F_{o2,i+1/2}^{skew,FV} = \frac{1}{4}(\hat{U}_i + \hat{U}_{i+1})(\hat{V}_i + \hat{V}_{i+1}) \quad (3.4)$$

四阶的有限差分/有限体积格式表示为：

$$F_{o4,i+1/2}^{skew,FD} = \frac{1}{3}(U_i + U_{i+1})(V_i + V_{i+1}) - \frac{1}{24}(U_{i-1}V_{i-1} + U_{i-1}V_{i+1} + U_iV_i + U_iV_{i+2} + U_{i+1}V_{i+1} + U_{i+1}V_{i-1} + U_{i+2}V_i + U_{i+2}V_{i+2}) \quad (3.5)$$

$$F_{o4,i+1/2}^{skew,FV} = \frac{1}{3}(\hat{U}_i + \hat{U}_{i+1})(\hat{V}_i + \hat{V}_{i+1}) - \frac{1}{24}(\hat{U}_{i-1}\hat{V}_{i-1} + \hat{U}_{i-1}\hat{V}_{i+1} + \hat{U}_i\hat{V}_i + \hat{U}_i\hat{V}_{i+2} + \hat{U}_{i+1}\hat{V}_{i+1} + \hat{U}_{i+1}\hat{V}_{i-1} + \hat{U}_{i+2}\hat{V}_i + \hat{U}_{i+2}\hat{V}_{i+2}) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\hat{U}_{i+1}\hat{V}_{i+1} + \hat{U}_i\hat{V}_i) - \frac{1}{4}(\hat{U}_{i+1} + \hat{U}_i)(\hat{V}_{i+1} + \hat{V}_i)\right) \quad (3.6)$$

容易看出，上述二阶的有限差分和有限体积格式在形式上是一致的，它们实际上就是Jameson等人提出的二阶中心格式^[263]；四阶的有限差分和有限体积格式则存在一些差别，有限体积比有限差分多出了一项。von Kaenel等人采用四阶偏斜对称格式，结合ADM模型，对激波/湍流边界层的相互作用问题进行了大涡模拟，取得了很好的结果^[171]；本文的工作中，为了提高空间离散格式的精度，对流通量的离散也选用了四阶格式，二阶格式只在某些特殊情况下使用（如初始阶段的计算中，若初场质量较差，则采用二阶格式增强程序的健壮性）。理论上，MPLES采用有限体积法离散，对流通量的四阶格式应使用公式(3.6)，但作者在实践中发现，使用该公式计算某些具有复杂几何边界的流动问题时，程序偶尔会发散，改用有限差分公式后，该问题消失，因而实际的计算中，对流通量的离散使用了公式(3.5)。

3.2.1.2 矩阵人工粘性

任意选择一个网格单元 (i, j, k) ，假设 $(i+1/2, j, k)$ 界面处的人工粘性通量用 $D_{i+1/2}$ 表示，则它的计算公式可以写为^{[257][264][265]}：

$$D_{i+1/2} = |A|_{i+1/2} \Delta S_{i+1/2} \left[\varepsilon_{i+1/2}^{(2)} (\mathcal{Q}_{i+1} - \mathcal{Q}_i) - \varepsilon_{i+1/2}^{(4)} (\mathcal{Q}_{i+2} - 3\mathcal{Q}_{i+1} + 3\mathcal{Q}_i - \mathcal{Q}_{i-1}) \right] \quad (3.7)$$

上式中系数 $\varepsilon_{i+1/2}^{(2)}$ 和 $\varepsilon_{i+1/2}^{(4)}$ 的定义分别为：

$$\varepsilon_{i+1/2}^{(2)} = k^{(2)} \max(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{i+1/2}^{(4)} = \max\left[0, \left(k^{(4)} - \varepsilon_{i+1/2}^{(2)}\right)\right] \quad (3.9)$$

其中的 γ_i 代表压力梯度参数:

$$\gamma_i = \frac{|p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}|}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}} \quad (3.10)$$

而经验系数 $k^{(2)}$ 和 $k^{(4)}$ 的典型值分别取 $k^{(2)} = 1/2$ 以及 $1/128 \leq k^{(2)} \leq 1/64$ 。

式(3.7)中的 $|\mathbf{A}|_{i+1/2}$ 代表对流通量Jacobian矩阵的绝对值:

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{T} |\mathbf{A}| \mathbf{T}^{-1} \quad (3.11)$$

其中 \mathbf{T}^{-1} 是由左特征向量构成的矩阵, \mathbf{T} 是由右特征向量构成的矩阵, \mathbf{A} 则代表由特征值构成的对角阵, $|\mathbf{A}|$ 的定义如下:

$$|\mathbf{A}| = \begin{bmatrix} |\lambda_1| & & & & \\ & |\lambda_2| & & & \\ & & |\lambda_3| & & \\ & & & |\lambda_3| & \\ & & & & |\lambda_3| \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

特征值 $\lambda_1 \sim \lambda_3$ 取值如下:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c \\ \lambda_2 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c \\ \lambda_3 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中 \mathbf{u} 为网格单元界面上的速度矢量, \mathbf{n} 则是网格单元界面的单位法向矢量:

$$\mathbf{u} = (u, v, w) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \quad (3.15)$$

从文献 [265]可知, $|\mathbf{A}|$ 的计算公式可以写为:

$$|\mathbf{A}| = |\lambda_3| \mathbf{I} + \left(\frac{|\lambda_1| + |\lambda_2|}{2} - |\lambda_3| \right) \times \left[\frac{\gamma - 1}{c^2} \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \right] + \frac{|\lambda_1| - |\lambda_2|}{2c} \times \left[\mathbf{E}_3 + (\gamma - 1) \mathbf{E}_4 \right] \quad (3.16)$$

上面的公式中, $\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{E}_4$ 均为 5×5 的矩阵, \mathbf{I} 则是 5×5 的单位阵, $\mathbf{E}_1 \sim \mathbf{E}_4$ 可按下面的公式计算:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_4, \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_4, \quad \mathbf{E}_4 = \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_2 \quad (3.17)$$

其中：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1 &= [1, u, v, w, h_t] \\
 \mathbf{R}_2 &= [q^2/2, -u, -v, -w, 1] \\
 \mathbf{R}_3 &= [0, n_x, n_y, n_z, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \\
 \mathbf{R}_4 &= [-\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, n_x, n_y, n_z, 0]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

这里面 h_t 代表总焓， $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ 。从式(3.13)可知，靠近滞止点时，特征值 λ_3 趋于 0，而靠近声速线时， λ_1 或 λ_2 趋于 0，此时人工粘性也接近 0 值，为避免这种情况发生，对特征值的数值做如下限制：

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\lambda}_1| &= \max(|\lambda_1|, V_n \lambda) \\
 |\tilde{\lambda}_2| &= \max(|\lambda_2|, V_n \lambda) \\
 |\tilde{\lambda}_3| &= \max(|\lambda_3|, V_l \lambda)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中 $\lambda = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| + c$ ， V_n 和 V_l 是经验系数，可以取 $V_n = 0.25$ ， $V_l = 0.025$ 。

3.2.1.3 显式滤波

为了消除因使用中心格式而在流场中出现的“2- Δ ”振荡，Bogey和Bailly等人推导了 11 点的显式选择性滤波器（selective filter）^{[152][153]}，对于计算域内部的网格点，滤波公式如下：

$$f_i^d = f_i - \sigma \sum_{n=-5}^5 d_n f_{i+n} \tag{3.20}$$

上式中 f_i 代表未滤波的流场变量， f_i^d 则是滤波后的流场变量， σ 代表滤波强度，其取值范围在 0 到 1 之间。 d_n 是滤波系数且满足 $d_n = d_{-n}$ ，各系数取值如下：

$$\begin{aligned}
 d_0 &= 0.215044884112, & d_1 &= -0.187772883589 \\
 d_2 &= 0.123755948787, & d_3 &= -0.059227575576 \\
 d_4 &= 0.018721609157, & d_5 &= -0.002999540835
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

由于在 MPLES 中，边界处只存在两层虚网格，因此对靠近计算域边界的网格点，只能选择非对称的 11 点滤波器，其计算公式如下：

$$f_i^d = f_i - \sigma \sum_{n=-P}^Q d_n f_{i+n} \tag{3.22}$$

上式中各项的定义同式(3.20)。当 $P = 4$ 、 $Q = 6$ 时，滤波系数取值如下：

$$\begin{aligned}
d_{-4} &= 0.008391235145, & d_{-3} &= -0.047402506444 \\
d_{-2} &= 0.121438547725, & d_{-1} &= -0.200063042812 \\
d_0 &= 0.240069047836, & d_1 &= -0.207269200140 \\
d_2 &= 0.122263107844, & d_3 &= -0.047121062819 \\
d_4 &= 0.009014891495, & d_5 &= 0.001855812216 \\
d_6 &= -0.001176830044
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$P=3$ 、 $Q=7$ 时，滤波系数取值：

$$\begin{aligned}
d_{-3} &= -0.000054596010, & d_{-2} &= 0.042124772446 \\
d_{-1} &= -0.173103107841, & d_0 &= 0.299615871352 \\
d_1 &= -0.276543612935, & d_2 &= 0.131223506571 \\
d_3 &= -0.023424966418, & d_4 &= 0.013937561779 \\
d_5 &= -0.024565095706, & d_6 &= 0.013098287852 \\
d_7 &= -0.002308621090
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$P=2$ 、 $Q=8$ 时，滤波系数取值：

$$\begin{aligned}
d_{-2} &= 0.052523901012, & d_{-1} &= -0.206299133811 \\
d_0 &= 0.353527998250, & d_1 &= -0.348142394842 \\
d_2 &= 0.181481803619, & d_3 &= 0.009440804370 \\
d_4 &= -0.077675100452, & d_5 &= 0.044887364863 \\
d_6 &= -0.009971961849, & d_7 &= 0.000113359420 \\
d_8 &= 0.000113359420
\end{aligned} \tag{3.25}$$

在对第五章和第六章的低压涡轮叶栅进行模拟时，采用了上述显式滤波器消除流场中的非物理振荡，流场每推进5个物理时间步，沿网格的*i*、*j*、*k*三个方向依次进行一次滤波。该操作针对守恒变量，即对 ρ 、 ρu_1 、 ρu_2 、 ρu_3 和 ρE 进行滤波，其余的流场变量则在此基础上计算。

3.2.2 粘性通量的计算

相比对流通量，粘性通量的椭圆特性使得其离散过程相对简单，从前文的介绍已经知道，该通量的离散就是要利用网格中心的流场变量将网格面上的 \mathbf{F}_n^v 表示出来。参考粘性通量的定义（式(2.82)）可知，要想计算网格单元表面的 \mathbf{F}_n^v ，就必须知道单元表面的以下参数：首先是流场变量 u_1 、 u_2 、 u_3 、 ρ 和 T ，其次是亚格子模型系数 C 、 C_l 和 Pr_{sgs} ，第三是粘性系数 μ ，第四是各速度分量和温度的偏导数。

对于流场变量和亚格子模型系数，已知它们在网格中心的值，则界面上的值通过简单的算术平均得到：

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) \tag{3.26}$$

粘性系数 μ 的计算也可以采用算术平均, 但由于界面上的温度 $T_{i+1/2}$ 已知, 因此这里利用 Sutherland 公式直接求得 μ 值。 \mathbf{F}_n^v 计算的最大困难来源于上述第四个部分, 即单元表面偏导数的计算, MPLES 中选择了目前应用较为广泛的一种方法: 构造围绕单元表面的辅助控制体, 利用高斯公式计算偏导数^{[62][257]}。图 27 给出了辅助控制体的示意图 (图中虚线框包围的区域), 对于任意物理量 ϕ ($\phi = u_1, u_2, u_3, T$), 下面推导计算 $\partial\phi/\partial x_i$ 的公式。

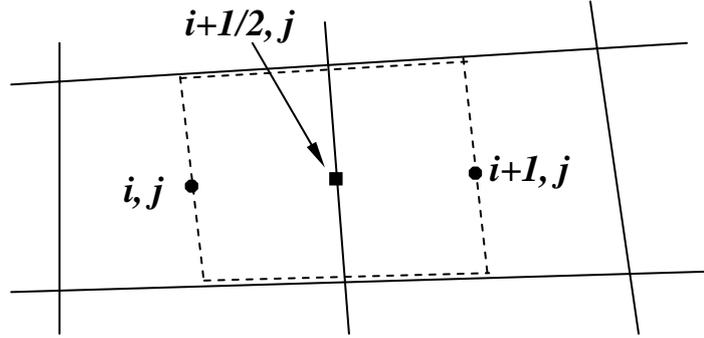


图 27 用于计算网格单元表面偏导数的辅助控制体示意图 (虚线包围区域)

一般情况下, 利用高斯公式, 总有下面的等式:

$$\oint_{\partial V} \phi \mathbf{i} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \phi \mathbf{i}) dV = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x} dV \quad (3.27)$$

将上式应用到图 27 所示的辅助控制体, 则容易得到:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{i} \cdot \Delta \mathbf{S}_n \quad (3.28)$$

其中 V 代表辅助控制体的体积, $\Delta \mathbf{S}_n$ 是其表面的面向量, 同理可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S}_n \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{S}_n \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.3 控制方程组的时间离散

完成控制方程组的空间离散后, 可以将式(3.1)写为如下的半离散形式:

$$\frac{dQ_{i,j,k}}{dt} = \mathbf{R}_{i,j,k} \quad (3.30)$$

其中剩余项 $\mathbf{R}_{i,j,k}$ 定义如下:

$$\mathbf{R}_{i,j,k} = -\frac{1}{V_{i,j,k}} \left(\sum_{n=1}^6 \mathbf{F}_n \cdot \Delta \mathbf{S}_n - \sum_{n=1}^6 \mathbf{F}_n^v \cdot \Delta \mathbf{S}_n \right) \quad (3.31)$$

MPLES中，对式(3.30)的离散采用了3阶3步的紧致Runge-Kutta方法^[266]：

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)} &= \mathbf{Q}^n + \alpha_1 \Delta t \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{Q}^{(2)} &= \mathbf{Q}^{(1)} + \alpha_2 \Delta t \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{Q}^{(3)} &= \mathbf{Q}^{(2)} + \alpha_3 \Delta t \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{Q}^{n+1} &= \mathbf{Q}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

上式中 Δt 代表物理时间步， \mathbf{R}_0 、 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 的定义如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n) \\ \mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(1)}) + \xi_1 \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}(\mathbf{Q}^{(2)}) + \xi_2 \mathbf{R}_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

其中各系数的值为： $\alpha_1 = 1/2$ ， $\alpha_2 = 0.9106836$ ， $\alpha_3 = 0.3660254$ ， $\xi_1 = -0.6830127$ ， $\xi_2 = -4/3$ 。理论分析表明，上述时间离散格式的稳定性要求：

$$CFL \leq \sqrt{3} \quad (3.34)$$

但在实际计算中，通常取 $CFL = 1$ 。网格单元当地时间步长的计算公式如下^[257]：

$$\Delta t_{i,j,k} = CFL \frac{V_{i,j,k}}{\left(\Lambda^i + \Lambda^j + \Lambda^k \right)_{i,j,k} + 4 \left(\Lambda_v^i + \Lambda_v^j + \Lambda_v^k \right)_{i,j,k}} \quad (3.35)$$

其中 Λ^i 和 Λ_v^i 的定义分别为：

$$\Lambda^i = \left(|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^i| + c \right) \Delta S^i \quad (3.36)$$

$$\Lambda_v^i = \frac{1}{\text{Re}} \max \left(\frac{4}{3\rho}, \frac{\gamma}{\rho} \right) \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_{\text{sgs}}}{\text{Pr}_{\text{sgs}}} \right) \frac{(\Delta S^i)^2}{V_{i,j,k}} \quad (3.37)$$

利用上式求得各网格单元的当地时间步长后，流场推进的物理时间步长 Δt 取为：

$$\Delta t = \min(\Delta t_{i,j,k}) \quad (3.38)$$

3.4 定解条件

对于封闭的大涡模拟控制方程组，必须给定恰当的边界条件和初始条件，才能构成一个完整的定解问题。本节首先对MPLES中常见的边界条件逐一进行介绍，接下来对LES或DNS计算的初场设置方法做了总体说明，由于初始条件的设定通常依赖于具体的流动问题，因而更多的细节将在各算例中单独给出。

3.4.1 边界条件

对于可压缩流动的LES或者DNS而言，边界条件的设定面临着诸多困难：一方面，为减少计算量，总是尽量选取较小的计算域，但计算域尺寸越小，边界处的数值反射就越强烈，由此对计算结果的污染也越严重，为减少数值反射，研究者针对不同的流动问题发展了多种无反射边界条件，即便如此，对于边界处存在强烈非线性效应的流动，目前仍然缺乏较为通用的解决方案^[267]；另一方面，相比RANS计算，LES/DNS对于入口边界条件有着极高的要求，在空间发展流动的模拟中，流向的周期性边条不再有效，为真实模拟背景湍流度、周期性尾迹、湍流边界层等对流动产生的影响，需要在计算域入口提供三维瞬态且随时间变化的流场变量，虽然已经存在一系列相关的研究工作^[268]，但距离“相对完善的LES/DNS入口边界条件”这一目标仍有很大差距。

目前，针对可压缩流动的LES或DNS工作中，应用最为广泛的边界条件是由Poinsot和Lele提出的NSCBC (Navier-Stokes characteristic boundary conditions)^[269]及其改进形式^{[270][271][272][273][274]}，NSCBC的应用虽然获得了巨大的成功，但对于本文的研究工作而言，该方法并不是非常合适：首先，最初的NSCBC是针对直角坐标系发展的，计算域边界需要和坐标轴垂直，虽然后来被推广到广义坐标系中^{[270][271][273]}，但微分形式的边条适合采用有限差分离散，要想应用到有限体积的MPLES则显得较为困难；其次，内流问题的模拟中，为了与实验对照，亚音的计算域入口通常给定总温、总压和气流角作为边界条件，但NSCBC的入口边条则通常给定瞬态的温度和三个速度分量，因此并不适合内流问题的模拟；第三，对于出口边界处存在强烈非线性效应的流动问题，NSCBC需要配合其他措施（如出口缓冲区）才能取得较好的效果，这种情形下，使用NSCBC的意义不再突出。

基于上面的分析，MPLES中并未使用NSCBC，而是针对后文的具体算例采用了如下的解决方案：对于圆柱绕流的模拟，由于计算域足够大，使用相对简单的远场特征边界条件；对于涡轮叶栅的模拟，计算域入口给定总温、总压和气流角，计算域出口给定背压（为减少数值反射，还设置了出口缓冲区），此外，涡轮叶栅的计算还涉及对背景湍流度、周期性尾迹效应的模拟，相关的边条放在具体的算例中给出。

3.4.1.1 固壁边界

对于粘性流动，固壁采用无滑移条件，设壁面的三个速度分量分别为 u 、 v 和 w ，则速度边条表示为（默认壁面静止）：

$$u = v = w = 0 \quad (3.39)$$

对于等温壁面和绝热壁面两种情形，相应的温度边条分别为：

$$T = T_w \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (3.41)$$

通常来讲，物面处的压力采用法向动量方程^[275]求解较为准确，但实践表明，直接外推压力也能获得较为理想的结果，因而程序中采用了外推。边界处的温度、压力更新后，利用状态方程计算密度，由此完成了固壁边条的设定。

3.4.1.2 远场边界

计算外流问题时（如对翼型绕流或后文圆柱绕流等的模拟），已知无穷远处的自由流参数，需要据此在计算域的外缘设定所谓的远场边界条件，远场边界的处理方法很多，其中比较精确的一种是文献 [250]给出的特征边界条件，为节省篇幅，这里不作详细推导，只给出特征边条的计算公式，相关细节可以参考文献 [250][275]。

下面的公式中，用下标“ b ”表示将要计算的边界条件，下标“ ∞ ”表示无穷远处的自由流条件，下标“ e ”表示从计算域内部外插得到的物理量；另外，边界处的单位法向矢量 \mathbf{n} 指向计算域内部， $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 。假设无穷远来流的压力为 p_∞ ，密度 ρ_∞ ，速度 $\mathbf{v}_\infty = (u_\infty, v_\infty, w_\infty)$ ，那么，对于亚音速的进口边界，边条的计算公式如下：

$$\begin{aligned} p_b &= (p_\infty + p_e)/2 + \rho c (\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_e) \cdot \mathbf{n} / 2 \\ \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} &= (p_\infty - p_e) / (2\rho c) + (\mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}_e) \cdot \mathbf{n} / 2 \\ \rho_b &= \rho_\infty (p_b / p_\infty)^{1/\gamma} \\ u_b &= u_\infty + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}) n_x \\ v_b &= v_\infty + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}) n_y \\ w_b &= w_\infty + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}) n_z \end{aligned} \quad (3.42)$$

对于亚音速的出口边界，计算公式变为：

$$\begin{aligned} p_b &= (p_\infty + p_e)/2 + \rho c (\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_e) \cdot \mathbf{n} / 2 \\ \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} &= (p_\infty - p_e) / (2\rho c) + (\mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}_e) \cdot \mathbf{n} / 2 \\ \rho_b &= \rho_e (p_b / p_e)^{1/\gamma} \\ u_b &= u_e + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}) n_x \\ v_b &= v_e + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}) n_y \\ w_b &= w_e + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}) n_z \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.4.1.3 亚音进口

在诸如叶栅流动等内流问题的计算中，为了与实验对照，通常的亚音进口边条提法

是在进口边界指定总温 T_t 、总压 p_t 和两个气流角^{[62][257]}。亚音条件下，从特征理论可知，有一族波特征从计算域内部向外传播，因此需要从计算域内外插一特征变量，目前通常使用的是外插向上游传播的Riemann不变量 R^- ，其定义如下：

$$R^- = v_n - \frac{2c}{\gamma-1} = v \cos \theta - \frac{2c}{\gamma-1} \quad (3.44)$$

其中 v 为气流速度， θ 为气流方向与进口边界法向（指向计算域内部）之间的夹角，由此 $v_n = v \cos \theta$ 代表法向速度分量， c 为音速。亚音条件下，通过外推 R^- ，可以得到关于进口音速 c_b 的一元二次方程：

$$\left(\frac{2}{\gamma-1} + \cos^2 \theta \right) c_b^2 + 2R^- \cdot c_b + \frac{\gamma-1}{2} (R^-)^2 - \frac{T_t}{Ma^2} \cos^2 \theta = 0 \quad (3.45)$$

假设：

$$A = \frac{2}{\gamma-1} + \cos^2 \theta, \quad B = 2R^-, \quad C = \frac{\gamma-1}{2} (R^-)^2 - \frac{T_t}{Ma^2} \cos^2 \theta \quad (3.46)$$

于是 c_b 的计算公式可以写为：

$$c_b = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.47)$$

得到 c_b 后，边界处的其他物理量计算如下：

$$T_b = (c_b \cdot Ma)^2 \quad (3.48)$$

$$p_b = p_t / (T_t/T_b)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.49)$$

$$\rho_b = \frac{p_b}{T_b} \gamma Ma^2 \quad (3.50)$$

$$v_b = c_b \sqrt{\frac{2(T_t/T_b - 1)}{\gamma-1}} \quad (3.51)$$

利用 v_b 和给定的进口气流角，可以算出所有的速度分量。

3.4.1.4 亚音出口/缓冲区

内流问题的计算中，出口通常给定背压 p_b ，亚音条件下，从特征理论可知，有一族波特征从计算域外部向内传播，给定 p_b 后，外插其余的特征变量就可以获得较好的结果，采用类似 3.4.1.2 的方法，可以得到出口边条的计算公式^[275]：

$$\begin{aligned}
\rho_b &= \rho_e + (p_b - p_e)/c^2 \\
\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} &= (p_b - p_e)/(\rho c) + \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n} \\
u_b &= u_e + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n})n_x \\
v_b &= v_e + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n})n_y \\
w_b &= w_e + (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n})n_z
\end{aligned} \tag{3.52}$$

这里的 \mathbf{n} 仍是边界处指向计算域内部的单位法向矢量， $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ ，下标“ b ”、“ ∞ ”和“ e ”的含义也同 3.4.1.2 一致。

上述出口边条的执行虽然简单，但是不可避免的会在边界处引入数值反射，由此造成计算结果的严重污染，在边界附近存在强烈非线性效应的情况下更是如此，为解决该问题，研究者发展了这样的处理方法：在靠近出口边界的计算域内部划定一个有限区域，该区域内通过改变控制方程或其他手段逐步将流场的脉动耗散掉，使得出口边界处的流动变得相对均匀，这个区域被称为出口缓冲区（buffer zone，也被称为 absorbing layers、fringe regions、sponge zone，等等）^[267]。使用出口缓冲区的好处在于：一方面，由于流场脉动被耗散、出口边界处流动变得均匀，流场的非线性效应大大减弱，由此出口边界的数值反射也急剧减小；另一方面，即使在边界处仍存在较强的数值反射，但在它向计算域内部传播的过程中，缓冲区会发挥耗散作用削弱其幅值，使得真正进入流场的数值反射非常微弱。当然，使用出口缓冲区也存在一些缺点，首先，由于缓冲区内部的流场并非真实的物理流场，由此该区域的存在增加了计算量；其次，缓冲区的设计必须根据具体的流动情况进行考虑，其效果的好坏很大程度上依赖于经验。

构造缓冲区的方法很多，如改变控制方程、显式滤波、网格拉伸、引入人工粘性、增加物理粘性等等^[267]，目前使用最多的主要有两种：改变控制方程和显式滤波，下面首先对它们进行简单的介绍。改变控制方程主要是指在流动控制方程的右侧人为加入形如 $-\sigma(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{ref})$ 的激励项（forcing term），由此控制方程变为^[276]：

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = rhs(\mathbf{q}) - \sigma(\mathbf{q} - \mathbf{q}_{ref}) \tag{3.53}$$

式中 \mathbf{q} 代表将要求解的流场变量， $rhs(\mathbf{q})$ 代表原控制方程的右端项， σ 称为激励强度， \mathbf{q}_{ref} 则是流场变量的参考解。激励项的主要作用在于：通过在缓冲区内的执行，驱动靠近出口边界的流场逐渐趋近预设的参考解 \mathbf{q}_{ref} ，由此弱化计算对边界条件的敏感度、简化边界条件的执行。缓冲区使用激励项时，有两个问题需要特别注意，其一是激励强度 σ 数值的选取，引入缓冲区后，出口边界的数值反射大大减弱了，但物理域与缓冲区之间则形成了一个新的内边界，如果处理不好，可能在该边界又会产生数值反射，要解

决这个问题，就要求 σ 的数值保证从物理域（ $\sigma=0$ ）到缓冲区（ $\sigma>0$ ）的光滑过渡，也就是说， σ 的数值必须从内边界处的0值开始，逐渐过渡到一个适当的正值，既保证不在缓冲区内部产生新的数值反射，又保证出口边界的流场解趋近于参考解 \mathbf{q}_{ref} 。其二则是参考解 \mathbf{q}_{ref} 的选取，一种比较理想的情形是取 \mathbf{q}_{ref} 为出口边界处瞬态流场的某种平均，但在进行计算之前，该平均是未知的，而 \mathbf{q}_{ref} 又需要提前给定，因此该方案并不十分可行，为解决这一问题，不同研究者使用了不同的方法，如将 \mathbf{q}_{ref} 取为实验测量的平均场^{[277][278]}、RANS计算的平均场^[279]、或在求解过程中动态计算^[280]等等，但很显然，目前使用的这些措施都会对数值模拟提出额外的要求，而这也成了激励项方法的一个明显缺点。

除了改变控制方程，另一种常见的缓冲区构造方法是采用所谓的显式滤波，该方法通常和缓冲区的网格拉伸（grid-stretching）结合在一起使用^{[281][282]}，其主要思想如下：为了削弱从物理域进入缓冲区的流场脉动，使得出口边界的流场变得相对均匀，通过在缓冲区内部对流动变量进行空间滤波达到消除流场脉动的目的。同前述的激励项方法一样，为了避免物理域和缓冲区内边界的数值反射，空间滤波的强度应该实现从物理域到缓冲区的光滑过度，如果缓冲区还存在网格拉伸，那对它也有同样的要求。相比改变控制方程的方法，显式滤波的执行更为简单，也不涉及指定参考解 \mathbf{q}_{ref} 的问题，因而更具通用性，也更容易在程序中实现。

综合上面的分析，本文工作中，出口边界选用了显式滤波方法来构造缓冲区^{[283][284]}。现假设缓冲区位于计算网格 i 方向的出口段，其起始和终止位置（ i 方向）网格单元的编号分别为 n_{beg} 和 n_{end} ，由此定义缓冲区的归一化坐标 η 如下：

$$\eta(n) = \frac{n - n_{beg} + 1}{n_{end} - n_{beg} + 1}, \quad (n_{beg} \leq n \leq n_{end}) \quad (3.54)$$

很显然， $0 \leq \eta \leq 1$ ，接下来根据归一化坐标 η 定义滤波强度 σ ：

$$\sigma(\eta) = \alpha \cdot \eta^\beta \quad (3.55)$$

其中的 α 和 β 是经验系数。对于缓冲区内 (i, j, k) 位置的某一流场变量 $f_{i,j,k}$ ，假设滤波后变量用 $\bar{f}_{i,j,k}$ 表示，则缓冲区内的显式滤波公式写为：

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i,j,k} &= f_{i,j,k} + \sigma \left[(f_{i+1,j,k} + f_{i-1,j,k} + f_{i,j+1,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j,k+1} + f_{i,j,k-1}) / 6 - f_{i,j,k} \right] \\ &= (1 - \sigma) f_{i,j,k} + \frac{\sigma}{6} (f_{i+1,j,k} + f_{i-1,j,k} + f_{i,j+1,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j,k+1} + f_{i,j,k-1}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

式中的流场变量 f 既可以选择原始变量，也可以选择守恒变量。

3.4.1.5 周期性边界/网格块界面

周期性边界/网格块界面的设置非常简单,由于定义了两层虚网格且网格块界面完全匹配,在完成内场的更新后,只需要将最靠近边界处两层内网格的物理量赋到对应的两层虚网格上即可。

3.4.2 初始条件

RANS 模拟中,初始条件经常这样给定:定常计算时采用某种均匀流场来定义初场,非定常计算则多采用定常计算的结果作为初场。但对于 LES 或者 DNS,确定初始条件却缺少类似的指导原则,通常情况下需要对具体流动问题进行分析,然后选择恰当的初场生成方法。一方面,对于某些问题,LES 或 DNS 对计算的初始条件有着极高的要求,初场的质量直接决定了模拟的成败;另一方面,即便某些问题对初场不敏感,但如果初始流场与“真实”流场差距太大,会导致从前者到后者的演化需要大量时间,大大增加计算开销。

从下一章开始,本文的工作涉及对槽道湍流、圆柱绕流、自由衰减各向同性湍流、自由衰减尾迹流、定常来流下的叶栅流动、周期性尾迹作用下的叶栅流动等算例的模拟,它们各自的初场生长方法也有所不同。对于自由衰减的各向同性湍流(见 5.3.1.1),初始速度场需要满足预先给定的能谱且散度为 0,因而有一套专门的速度场生成方法;而对于自由衰减的尾迹流(见 5.3.1.2),初场来源于充分发展的槽道流动,也不是任意给定的;槽道湍流(见 4.1.2)的初场则按照二维层流 Poiseuille 流的解析解给出,为了促使流场转捩,速度场中还需要加入一定的人工扰动,这几个算例都可以归入前述的第一种情形,即初场的质量决定了模拟的成败。剩下的几个算例,圆柱绕流和叶栅流动,则属于第二种情况,对它们的初场有两种处理方法:采用某种均匀流场或者用 RANS 的定常结果作为初场,显然,后者比前者节省计算时间。本文工作中,圆柱绕流和叶栅流动都涉及数种工况的计算,进行第一个工况的模拟时,作者没有用 RANS 做定常计算,而是直接给定速度零场,这种情形下,程序的健壮性较差,容易发散,计算中通过采用低阶格式(对流项使用二阶偏斜对称格式)、加大人工粘性等措施增强程序的稳定性,待流场演化的较为合理以后再将格式、系数等调整到合理的水平继续计算。第一个工况的模拟完成后,其他工况均可以用该工况的某个瞬态流场作为初场,这样可以节约大量的计算时间。

有关各算例初始流场生成的细节可参见相应章节的叙述。

3.5 并行策略

MPLES作为一个多块并行的大涡模拟求解器，必须具备这样的能力：首先，它能够处理任意界面匹配的多块结构化网格；其次，为保证并行效率，各进程的负载应大体保持平衡。一般情况下，实际计算问题的网格块数目与可使用的计算进程数往往并不相等，即使两者相等，各网格块的大小也可能存在很大差别，此时，为实现各进程的负载平衡，就必须根据进程数，对网格块进行适当的剖分与组合，保证各进程上总的网格单元数大致相等^[285]，这些操作在MPLES的前处理模块中进行（见附录A）。

MPLES中，有一个进程（0号进程）专门负责程序的输入输出，不参与计算，剩余的则都属于计算进程。从前面的叙述可知，由于网格的剖分与组合，各计算进程上均可能存在多个剖分后的网格子块，又由于任意两个子块间都可能存在搭接面，需要相互更新虚网格上的数据，因此从进程间通信的角度看，各计算进程完成所有子块内部点的推进后，任意两个进程间都可能需要交换数据，为简化这一过程，MPLES中全部使用MPI的聚合通信函数（组通信函数，如MPI_BCAST、MPI_GATHERV、MPI_SCATTERV、MPI_ALLTOALLV等）^{[286][287]}进行通信，实践证明：采用聚合通信函数可以减小并行编程的难度，避免出现“死锁”现象。

表 2 并行性能测试算例说明及测试结果

算例	进程数目	网格剖分	加速比	并行效率
Case1: LPT 340×150×32 163.2 万	2 (1)	1, 1, 1	1	100%
	3 (2)	2, 1, 1	2.09	105%
	5 (4)	4, 1, 1	3.10	78%
	9 (8)	4, 2, 1	6.92	87%
	16 (15)	5, 3, 1	14.85	99%
Case2: Channel 300×60×120 216 万	2 (1)	1, 1, 1	1	100%
	3 (2)	2, 1, 1	2.25	113%
	5 (4)	4, 1, 1	3.23	81%
	9 (8)	4, 1, 2	6.49	81%
	16 (15)	5, 1, 3	11.63	78%

为了测试程序的并行性能，作者采用低压涡轮叶栅和槽道两个算例各进行了 5 组计算，进程数分别为 2、3、5、9、16（计算进程数需要减去 1），表 2 给出了详细的算例说明及测试结果。其中加速比 $S(N)$ 和并行效率 $E(N)$ 的定义如下^[250]：

$$S(N) = \frac{T(2)}{T(N)} \quad (3.57)$$

$$E(N) = \frac{S(N)}{N-1} = \frac{T(2)}{(N-1) \cdot T(N)} \quad (3.58)$$

这里 N 是总的进程数目， $T(N)$ 代表在 N 个进程上完成某一个计算问题所花费的时间，由于 MPLES 中有一个进程用于 I/O 而未参与计算，因而相对原始的定义，这里做了一些改动。总的来看，两个测试算例都表明：直到 16 个进程并行，MPLES 都具有较高的并行效率；图 28 给出了两个算例加速比曲线与理想曲线的对比，从图中也可以看出，在测试范围内，加速比曲线与线性曲线偏差并不大。

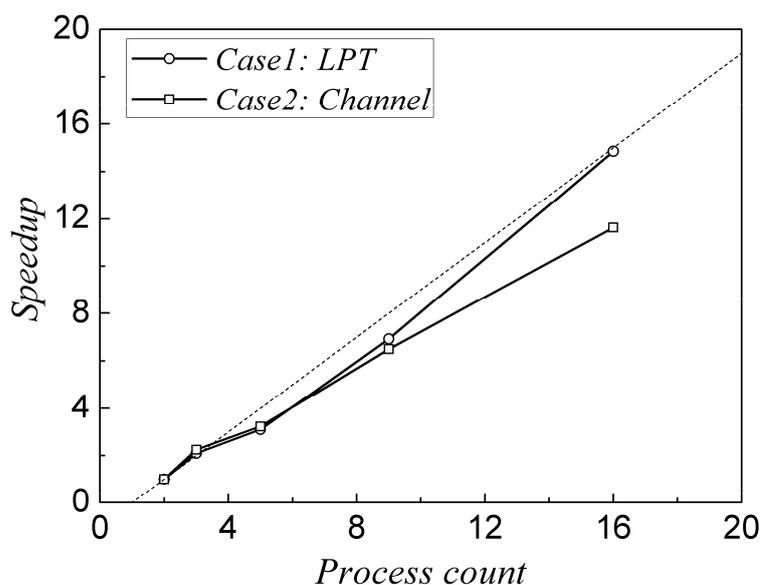


图 28 MPLES 的加速比测试结果

3.6 计算结果的后处理

对于 LES 或者 DNS 而言，计算沿时间方向推进的过程中，不同时刻的瞬态流场作为原始数据被不断输出，要想从中提取出有用信息并且通过对它们的分析达到深入理解和认识所研究流动现象的目的，就必须对这些原始数据进行适当的后处理。LES 或 DNS 计算结果的后处理具有如下特点：首先，通过对瞬态流场进行恰当的统计运算，可以获得流动的一阶、二阶甚至更高阶统计量；其次，将一系列相邻时刻的瞬态流场按时间顺序组织起来，就得到了流场的时空演化图像。在 MPLES 中，除了瞬态流场文件，输出的结果还可以包含流场状态监测文件、监测点时间序列文件以及瞬态亚格子应力文件等，其中流场状态监测文件输出整个计算过程中瞬态流场积分量（如流场中固壁边界所受压力、摩擦力的合力等）的时间序列，用于从整体上分析/判断流场所处的状态；计算中也可以根据需要在计算域内选择一系列的监测点，这些监测点流场变量的时间序列全

部被存储到监测点时间序列文件,用于在后处理中对监测点进行频谱分析;某些情况下,为了检验动力涡粘模型的作用,瞬态流场中的亚格子模型系数 C 、 C_l 、 Pr_{sgs} 以及亚格子粘性系数与分子粘性系数之比 μ_{sgs}/μ 也被输出,存放在瞬态亚格子应力文件中。相对来讲,流场状态监测文件和监测点时间序列文件的后处理工作较为简单,而对瞬态流场(包括瞬态亚格子应力文件)的处理则有较多细节需要关注,因此本节的内容只针对三个主要问题进行说明,即如何对计算结果进行统计分析、如何计算曲壁边界层的参数以及如何对瞬态流场进行旋涡识别。

3.6.1 计算结果的统计分析

在湍流相关的实验或计算工作中,对流场变量进行统计时,通常涉及三种平均方法:系综平均、时间平均和空间平均^{[32][179]},其中系综平均的定义最具通用性,但由于该方法需要在相同条件下进行多次独立的重复试验,工作量太大——对于LES或者DNS而言,目前的计算条件通常也不允许对同一算例进行多次的重复计算——因而系综平均很少在实践中被使用。这种情况下,为了获得有意义的统计量,就出现了另外两种平均方法:对于统计定常(statically steady^[27]或者statistically stationary^[32])的流动问题,根据各态历经假说,系综平均等于其长时间平均,因而这类问题适合采用时间平均方法处理;而对于统计均匀(statically homogeneous^[32])的流动问题,也可以证明,其系综平均等于全空间体积的平均,这类问题则通常采用空间平均方法处理。当然,在数值模拟中,针对具体的流动,可能存在组合使用时间和空间平均的情形,此外,对于存在典型周期性的流动,则可能还会引入相位平均的定义,这些内容将在下面做较为细致的说明。

本文的工作涉及对槽道湍流、圆柱绕流、自由衰减各向同性湍流、自由衰减尾迹流、定常来流下的叶栅流动、周期性尾迹作用下的叶栅流动等算例的模拟,各算例自身的特点导致其后处理时所使用的平均方法也有所不同,据此可以将它们分为两个大类:

第一类称为时间演化(time-evolving)流动,包括自由衰减各向同性湍流和自由衰减尾迹流,其特征在于,流动的统计特性随时间不断变化,如自由衰减各向同性湍流中流场的湍动能随时间逐渐减小,自由衰减尾迹流中速度亏损随时间不断减小、同时尾迹的半宽则不断增加。对于这类问题,平均运算只能针对某一时刻的瞬态流场进行,如果流动存在统计均匀方向,则通常沿这些方向进行空间平均,比如,自由衰减各向同性湍流的三个方向都是均匀方向,则流场变量沿整个空间做平均;又如,自由衰减尾迹流的流向和展向是均匀方向,则流场变量沿流向展向构成的平面进行平均。如果流动不存在统计均匀方向,则必须从初场开始,进行多次独立的重复计算,用特定时刻的多个结果

做系综平均，当然，这类问题在实践中很少遇到，系综平均方法也少有使用。对于时间演化的流动问题，为了研究流场随时间的变化规律，瞬态场的输出往往从计算启动就开始了，从 3.4.2 已经知道，这类问题对初始条件有比较严格的要求，通常不允许随意给定初场；而有关计算持续的时间以及计算结果输出的频率则需要根据流动自身的特点确定。

第二类则是统计定常流动，槽道湍流、圆柱绕流、定常来流下的叶栅流动和周期性尾迹作用下的叶栅流动大体上都可以归入这一类别。对于这类问题，由于初始条件通常不能准确给出，因此计算必须从初场开始，经过足够长时间的演化，流动才能进入到统计定常状态，这种情况下，首先需要解决的问题就是：采用什么标准来判断流场所处的状态。前已述及，计算中输出的流场状态监测文件包含了瞬态场积分量的信息，通过观察它们随时间的变化曲线，可以对流场状态的演化有较好的判断，比如，槽道湍流算例输出了上下壁面总的流向摩擦力，而圆柱绕流和叶栅流动算例则输出了圆柱/涡轮叶片所受的总压力和摩擦力，经验表明：流动进入统计定常状态以后，这些变量的曲线也进入准周期状态（对于圆柱绕流和尾迹作用下的叶栅流动，则具有明确的周期性），围绕某一平均值上下波动，此时便可以进行瞬态流场的采样了。开始输出计算结果后，又面临另外一个问题：输出瞬态场的时间间隔（设为 ΔT ）取多大，而总的采样时间（设为 T_{total} ）又应该有多长（或总的样本数应该有多少）。通常来说，确定采样频率以及总的采样时间应遵循如下原则：由于在统计定常状态，瞬态场积分量的变化曲线具有准周期性或周期性（设为 T ），那么采样的时间间隔应该远小于该周期，而总的采样时间又必须远大于该周期，即满足下式：

$$\Delta T \ll T \ll T_{total} \quad (3.59)$$

对于周期性非常明确的流动问题，显然，采样时间应该取为该周期的整数倍。理论上，采样时间越长，采样频率越高，获得的统计结果就越可靠，但实际工作中，由于受到计算时间/存储容量等因素的制约，它们的取值往往需要根据具体情况做一些折衷。完成样本的采集后，根据这类问题的统计定常特性，平均运算采用时间平均方法，即对所有的瞬态流场样本进行平均，如果流动存在统计均匀方向，也沿着这些方向进行空间平均，比如槽道湍流沿流向展向平面的平均，圆柱绕流和叶栅流动沿展向的平均等。

当流动存在明确的周期时（本文中特指周期性尾迹作用下的叶栅流动），除了对计算结果使用上面提到的时间/空间组合平均外，还需要引入相位平均的概念。由于周期 T 的数值已经提前给定，那么总的采样时间应取为 T 的整数倍，即 $T_{total} = MT$ ， M 代表采

样周期数；而每个周期的样本数目也应该取整数，设其等于 N ，于是 $\Delta T = T/N$ 。按照文献 [243] 的定义，假设时间平均用 $\overline{\bullet}$ 表示，某一特定相位 $t_{n_T}^m = mT + n_T T$ 的平均用 $\langle \bullet \rangle$ 表示，其中 m 是定义域为 $[0, M-1]$ 的整数， $0 \leq n_T < 1$ 是流场所处的相位，于是，相位平均的物理量可按下式计算（以某一速度分量为例）：

$$\langle u_i \rangle(t_{n_T}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} u_i(t_{n_T}^m) \quad (3.60)$$

显然，如果流动存在统计均匀方向，相位平均也和时间平均类似，需要引入沿空间的平均，因此，二者的关系可以表示为：

$$\overline{u_i} = \overline{\langle u_i \rangle} \quad (3.61)$$

进一步，瞬时速度可以做如下分解：

$$u_i = \langle u_i \rangle(t_{n_T}) + u_i'(t_{n_T}) = \overline{u_i} + \tilde{u}_i(t_{n_T}) + u_i'(t_{n_T}) \quad (3.62)$$

其中 $\tilde{u}_i(t_{n_T}) = \langle u_i \rangle(t_{n_T}) - \overline{u_i}$ 代表相位平均的扰动速度，而 $u_i'(t_{n_T})$ 则是真实的湍流随机脉动，由此，时间平均的雷诺应力 $\overline{\langle u_i' u_j' \rangle}$ 可按下式计算：

$$\overline{\langle u_i' u_j' \rangle} = \int_0^1 \left[\langle u_i - \langle u_i \rangle(t_{n_T}) \rangle \langle u_j - \langle u_j \rangle(t_{n_T}) \rangle \right] dn_T \quad (3.63)$$

3.6.2 边界层参数的计算方法

在分析涡轮叶栅计算结果时，对于时间平均或相位平均的流场，常常需要通过位移厚度、动量厚度、形状因子这类参数研究叶片表面边界层沿吸力面/压力面的发展。要计算上述参数，首先需要确定边界层的名义厚度，外流问题中，名义厚度通常定义为速度达到自由流速度 99% 或 99.5% 位置到壁面的距离，但是，对于叶轮机内部的流动，叶栅通道的存在导致其自由流速度并不均匀，因此外流中的定义不再适用。文献 [5] 对各类已有的边界层厚度计算方法进行分析和比较后发现：对于叶栅流动，奥地利格拉茨工业大学（Graz University of Technology）Sanz 教授所提供的方法能够获得很好的计算结果，因此本文也选用了这种方法，现将其计算过程简单介绍如下 [5]。

首先，选择叶片表面上任意一点 A，过 A 点作壁面的法线深入流场中，法线上某点 B 到壁面的距离为 y ，则 B 点的 BL 函数定义为：

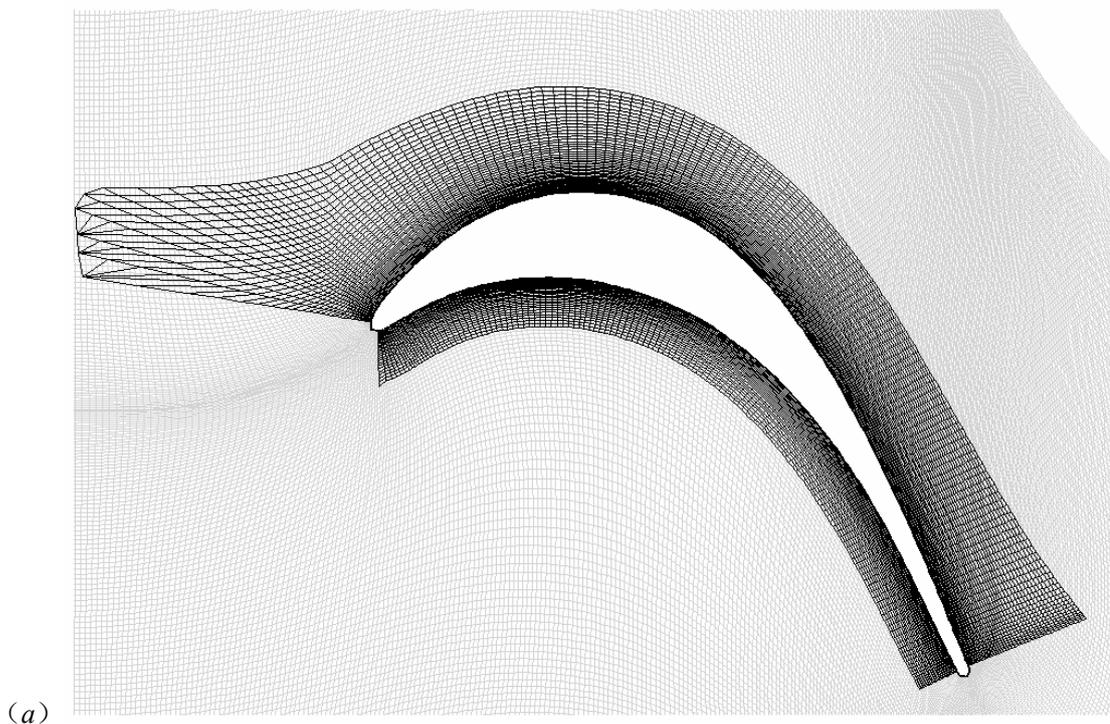
$$f(y) = y \left| \omega \left(1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \right) \right| \quad (3.64)$$

其中 ω 为点 B 位置流场的涡量， y^+ 是用当地壁面粘性长度定义的法向距离， A^+ 为

常数，取 $A^+ = 26$ ，通过该式可以求出 $f(y)$ 沿法向的分布。

接下来，寻找函数 $f(y)$ 的最大值，设 $y = y_{\max}$ 时函数取最大值 f_{\max} ，从 $y = y_{\max}$ 处向离开壁面的方向寻找 $f(y) = f_{\max}/2$ 的点，此处的 y 值定义为 y_{half} ，则边界层的名义厚度 $\delta = 1.2y_{\text{half}}$ 。求出 δ 以后，沿法向从 $y = 0$ 到 $y = \delta$ 积分，就可以算出边界层的其他参数了。

从上面的介绍可以看出，无论是确定边界层的名义厚度、还是计算边界层参数，都需要用到壁面法向的流场变量，但在生成计算网格时，虽然叶片表面的网格线与壁面保持正交，但该族曲线远离壁面后就逐渐偏离法向（参见图 60），因此相关的计算工作不能沿网格线进行。为解决上述问题，如图 29 (a) 所示，沿着叶片的吸力面/压力面分别构造了与壁面完全垂直的辅助网格，其具体生成方法如下：沿叶片表面各网格点作壁面的法线，求出法线与计算网格各流向网格线的交点，将属于同一流向网格线的交点按顺序连接起来，它们与壁面法线族一起构成了辅助网格。获得辅助网格后，将时均流场/相均流场中的变量线性插值到辅助网格的节点上，接下来就可以沿辅助网格的法向网格线计算边界层参数了。图 29 (b) 给出了利用吸力面辅助网格计算得到的 BL 函数 $f(y)$ 的云图，从图中可以直观的看出，BL 函数正确的反映了叶片吸力面边界层的发展，这一方面说明上述边界层名义厚度计算方法的有效性，另外也从侧面表明辅助网格方法是非常必要的。



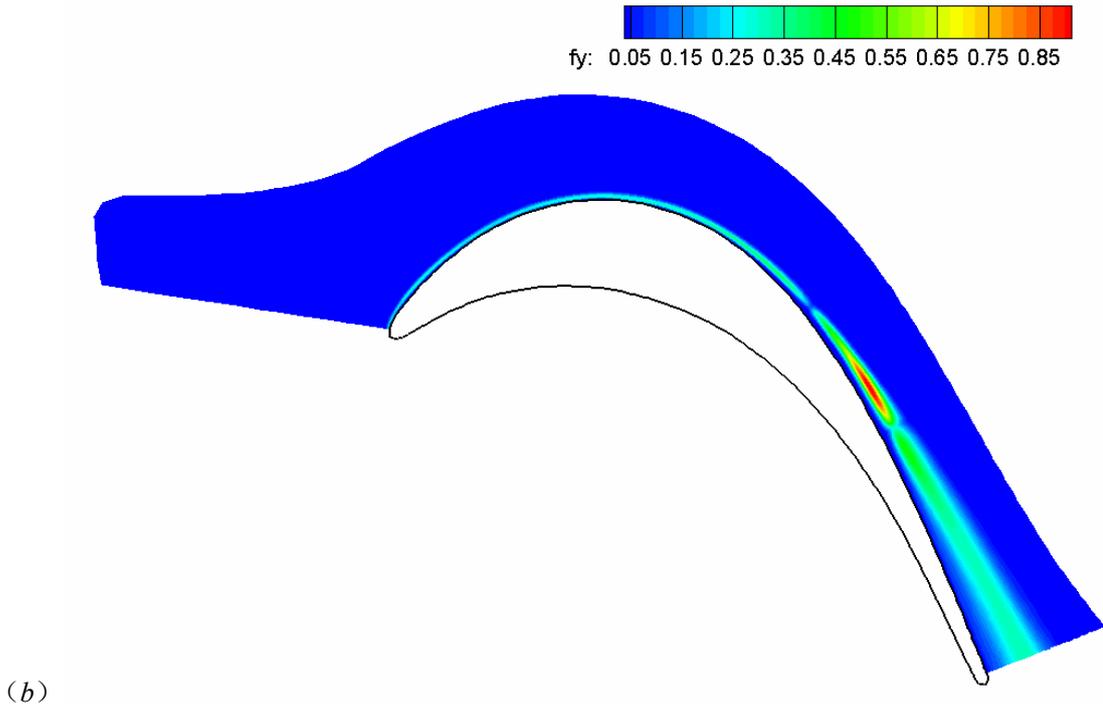


图 29 (a) 为计算叶片边界层参数而构造的吸力面/压力面辅助网格 (用于算例 C3/C4); (b) 利用吸力面辅助网格计算得到的 BL 函数云图 (算例 C3, 时均流场)

3.6.3 旋涡识别法则

LES或DNS方法具有的一个很大优点在于可以从计算中获得大量瞬态流场, 通过考察它们随时间的演化过程, 必然能够深化人们对流动现象的认识。众所周知, 流场中包含的大尺度相干结构刻画了流动的主要特征, 对流场演化过程具有决定性作用, 利用数值模拟获得大量瞬态流场后, 如何从中提取出大尺度相干结构 (即如何识别旋涡), 是研究流动演化过程首先需要解决的问题。尽管到目前为止, 不同研究者对于如何定义旋涡、如何进行旋涡识别还存在不同看法, 新的识别方法也不断涌现^{[288][289][290][291]}, 但目前已经存在一些被广泛接受和使用的旋涡识别法则^[292], 下面即以其中最具代表性的两种 (Q 法则和 λ_2 法则) 进行介绍。

Q 法则和 λ_2 法则均与速度梯度张量 $\nabla\mathbf{u}$ 相关, 根据张量分解定理^[14], $\nabla\mathbf{u}$ 可以唯一的分解为一个对称张量 \mathbf{S} 和一个反对称张量 $\mathbf{\Omega}$ 之和, 即:

$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{u} &= \mathbf{S} + \mathbf{\Omega} \\ u_{i,j} &= S_{ij} + \Omega_{ij}\end{aligned}\quad (3.65)$$

其中 \mathbf{S} 和 $\mathbf{\Omega}$ 的定义分别为:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

假设 $\nabla \mathbf{u}$ 的特征值为 σ ，则其特征方程可以写为^[293]：

$$\sigma^3 + P\sigma^2 + Q\sigma + R = 0 \quad (3.67)$$

其中 P 、 Q 、 R 是 $\nabla \mathbf{u}$ 的三个不变量，它们的定义如下：

$$\begin{aligned} P &= -u_{i,i} \\ Q &= \frac{1}{2}(u_{i,i}^2 - u_{i,j}u_{j,i}) \\ R &= -\det(u_{i,j}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

假设方程(3.67)的三个根为 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 ，由根与系数的关系可知：

$$\begin{aligned} P &= -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ Q &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \\ R &= -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Hunt等^[294]首先提出将旋涡定义为流场中具有正的第二不变量的区域（即 $Q > 0$ 区域），对于不可压流动， $u_{i,i} = 0$ ，于是：

$$Q = \frac{1}{2}(u_{i,i}^2 - u_{i,j}u_{j,i}) = -\frac{1}{2}u_{i,j}u_{j,i} = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (3.70)$$

文献[295]对上式定义的 Q 法则进行了详尽的分析，并应用大量DNS和LES算例验证了该方法的广泛适用性。

Jeong和Hussain^[296]利用 \mathbf{S} 和 $\mathbf{\Omega}$ 定义了一个新的张量 $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ ，由于该张量对称，因而只存在实的特征值，假设它的三个特征值分别为 λ_1 、 λ_2 和 λ_3 ，且有 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ ，则Jeong和Hussain认为：涡核是流场中 $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ 具有两个负特征值的区域，该定义等价于要求涡核区满足 $\lambda_2 < 0$ 这一条件，由此这一旋涡识别方法被称为 λ_2 法则。

研究表明， Q 和 λ_2 两种方法具有强烈的相关性^[297]，作者在实践中也发现：对于同一个瞬态流场，通过选取恰当的 Q 和 λ_2 数值，可以得到几乎完全一样的旋涡结构；考虑到 Q 法则的计算相对简单，因此在后文的工作中，旋涡识别均使用了 Q 法则。

针对实际流场进行旋涡识别时，无论应用 Q 法则还是 λ_2 法则，均面临这样一个问题：即如何选择 Q 或 λ_2 的阈值（threshold），事实上，到目前为止，都缺乏一个定量的标准，大多数情况下，只能依据经验在 $Q > 0$ 或 $\lambda_2 < 0$ 的范围内调整其数值，以期最好的将流场中的大尺度结构表现出来。

3.7 程序中的某些具体问题

除了上述各节介绍的内容，在程序的执行过程中，仍有一些其他的细节问题需要特别关注，本节即分别对这些问题的处理方法给出较为详细的说明。

3.7.1 滤波运算

从第二章对大涡模拟控制方程的推导可以知道，如果使用动力模拟，在LES的控制方程中将出现两个滤波尺度：一次滤波的 Δ 和检验滤波的 $\hat{\Delta}$ ，通常情况下， $\hat{\Delta} > \Delta$ 。虽然在原则上，推导和封闭LES的控制方程与数值求解该方程是两个完全独立的过程，但一旦开始在计算网格上离散控制方程，首先必须面对的问题就是：相对于网格单元的尺度 h ，如何选择一次滤波尺度 Δ ？有关LES数值误差的研究工作表明^{[105][119]}，为了保证计算中的亚格子应力远大于数值误差，应该选择较大的滤波器宽度，例如^[119]，如果采用六阶紧致中心格式离散， Δ/h 应该取2，而如果采用二阶中心格式， Δ/h 至少要等于4。但在实际工作中，采用大滤波器宽度的情况很少出现，几乎所有的计算都将网格间距默认为滤波尺度（ $\Delta/h=1$ ，网格滤波或隐式滤波），一方面，这是由于大的 Δ/h 将导致计算量迅速增加（ Δ 保持固定，如果 h 减半，则计算量增大16倍^{[37][69]}）；另外， h 固定的条件下，大的 Δ 在减小数值误差的同时却使计算能分辨的尺度范围变窄，实践表明，其最后结果往往并不优于网格滤波^[37]。因此，同其他绝大多数研究工作一样，本文也采用了隐式的网格滤波，这样的选择使得计算中真正需要执行的滤波操作只有一种，即检验滤波。

接下来考虑任意网格情况下对 Δ 和 $\hat{\Delta}$ 的计算，首先定义等价长度尺度（equivalent length scale） Δ_{eq} 如下^{[298][95]}：

$$\Delta_{eq} = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3} \quad (3.71)$$

这里的 Δ_1 ， Δ_2 ， Δ_3 为网格单元在三个方向的尺寸，当网格尺寸在各方向差别较大时，假设 $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3$ ， $a_1 = \Delta_1 / \Delta_3$ ， $a_2 = \Delta_2 / \Delta_3$ ，于是网格滤波尺度 Δ 的计算公式为：

$$\Delta = \Delta_{eq} f(a_1, a_2) \quad (3.72)$$

$$f(a_1, a_2) \approx \cosh \left\{ (4/27) \left[(\ln a_1)^2 - \ln a_1 \ln a_2 + (\ln a_2)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (3.73)$$

对于检验滤波尺度 $\hat{\Delta}$ ，存在类似的计算公式：

$$\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_{eq} f(\hat{a}_1, \hat{a}_2) \quad (3.74)$$

$$\hat{\Delta}_{eq} = (\hat{\Delta}_1 \hat{\Delta}_2 \hat{\Delta}_3)^{1/3} \quad (3.75)$$

其中的 $\hat{\Delta}_1$, $\hat{\Delta}_2$, $\hat{\Delta}_3$ 为检验滤波网格单元在三个方向的尺寸。

推导 LES 控制方程的过程中, 对 N-S 方程进行滤波时, 需要假设计算网格均匀, 以此来保证滤波操作与微分操作可交换顺序, 对于存在壁面或复杂几何边界的流动问题, 通常无法保证各方向的计算网格都是均匀的, 由此在执行检验滤波操作时, 只针对流动的统计均匀方向进行 (该方向的网格也保持均匀)。对于本文中的算例, 都存在一个或多个统计均匀方向, 如圆柱绕流、叶栅流动存在一个均匀方向 (展向), 槽道流、尾迹流存在两个均匀方向 (流向和展向)、各向同性湍流则存在三个均匀方向。如果流动有一个均匀方向 (假设为 z 向), 那么 $\hat{\Delta}_1 = \Delta_1$, $\hat{\Delta}_2 = \Delta_2$, $\hat{\Delta}_3 = 2\Delta_3$; 如果流动有两个均匀方向 (假设为 x 和 z 向), 那么 $\hat{\Delta}_1 = 2\Delta_1$, $\hat{\Delta}_2 = \Delta_2$, $\hat{\Delta}_3 = 2\Delta_3$; 如果流动有三个均匀方向, 则有 $\hat{\Delta}_1 = 2\Delta_1$, $\hat{\Delta}_2 = 2\Delta_2$, $\hat{\Delta}_3 = 2\Delta_3$ 。

要在计算中执行检验滤波操作, 就必须推导对应的计算公式, 首先考虑一维情况, 假设网格均匀分布, 网格点间距为 Δ , 离散网格点 $\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots$ 所对应的流场变量值分别为 $\dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots$, 如果检验滤波尺度 $\hat{\Delta} = 2\Delta$ 且采用物理空间的盒式滤波器:

$$G(x) = \begin{cases} 1/\hat{\Delta}, & \text{if } |x| \leq \hat{\Delta}/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.76)$$

那么点 x_i 滤波后的流场变量 \hat{f}_i 可以表示为:

$$\hat{f}_i = \int G(x') f(x_i - x') dx' = \frac{1}{\hat{\Delta}} \int_{-\hat{\Delta}/2}^{\hat{\Delta}/2} f(x_i - x') dx' = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_i - \Delta}^{x_i + \Delta} f(x) dx \quad (3.77)$$

即 \hat{f}_i 等于 $f(x)$ 在 $[x_i - \Delta, x_i + \Delta]$ 区间的积分除以 2Δ , 对于该积分, 利用梯形公式或 Simpson 公式计算, 可以分别得到:

$$\hat{f}_i = (f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1})/4 \quad (3.78)$$

$$\hat{f}_i = (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})/6 \quad (3.79)$$

本文的检验滤波运算选择了式 (3.79)。以上是针对流动存在一个均匀方向的情形, 如果流动存在两个 (假设为 x 和 z 向) 或三个均匀方向, 则滤波操作必须在所有均匀方向进行, 对应的计算公式分别为^[98]:

$$\begin{aligned} f_{i,j,k}^* &= (f_{i-1,j,k} + 4f_{i,j,k} + f_{i+1,j,k})/6 \\ \widehat{f_{i,j,k}} &= (f_{i,j,k-1}^* + 4f_{i,j,k}^* + f_{i,j,k+1}^*)/6 \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}
f_{i,j,k}^* &= (f_{i-1,j,k} + 4f_{i,j,k} + f_{i+1,j,k})/6 \\
f_{i,j,k}^{**} &= (f_{i,j-1,k}^* + 4f_{i,j,k}^* + f_{i,j+1,k}^*)/6 \\
\widehat{f_{i,j,k}} &= (f_{i,j,k-1}^{**} + 4f_{i,j,k}^{**} + f_{i,j,k+1}^{**})/6
\end{aligned} \tag{3.81}$$

3.7.2 模型系数的特殊处理

从第二章已经知道，采用动力涡粘模型封闭大涡模拟控制方程组时，一共有三个模型系数需要计算，即 C 、 C_l 和 Pr_{sgs} ，而为了保证计算的稳定性，三个系数的计算公式中引入了沿统计均匀方向的平均操作，实践表明，即使如此，某些情况下过大或过小的模型系数仍然会导致计算发散。于是，通过动力模型计算得到模型系数后，通常还会对它们的取值范围进行一些限制：

$$\begin{aligned}
0 &\leq C \leq C_{\max} \\
0 &\leq C_l \leq C_{l\max} \\
\text{Pr}_{\text{sgs min}} &\leq \text{Pr}_{\text{sgs}} \leq \text{Pr}_{\text{sgs max}}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

此外，也可以通过沿时间方向的松弛进一步增强计算的稳定性^{[37][299]}，对于三个系数，均有下式：

$$\phi^{n+1} = (1 - \varepsilon)\phi^n + \varepsilon\phi_{\text{cal}}^{n+1} \tag{3.83}$$

这里的 ϕ^n 、 ϕ^{n+1} 分别对应时间步取 n 和 $n+1$ 时的模型系数值， ϕ_{cal}^{n+1} 则是通过系数计算公式得到的 $n+1$ 时间步的计算值， ε 为松弛因子， $0 < \varepsilon \leq 1$ 。

上述模型系数的处理方法在 4.1 节进行了一系列的数值实验，其结果表明：限制 C 、 C_l 和 Pr_{sgs} 的取值范围对于保证计算的稳定性非常重要，但并不需要对系数做时间松弛，因此后续的模拟中均取 $\varepsilon = 1$ ，即不引入时间松弛。

3.7.3 网格分辨率要求

对于大涡模拟而言，要获得可靠的计算结果，除了要求准确的亚格子模型以及恰当的数值求解方法外，计算网格的分辨率也是一个非常重要的因素。本文通过对低压涡轮叶栅的模拟，研究非定常环境中涡轮叶片边界层的时空演化机制，显然，近壁区的网格分辨率是保证计算结果准确可靠的关键因素之一。

从第一章已经知道，大涡模拟方法需要分辨表征流场动力学演化机制的大尺度相干结构，对于湍流边界层而言，外区的大尺度结构与边界层厚度同一量级，但内区中对动量运输起主要作用的条带结构，其特征尺度却以壁面粘性长度为单位，也就是说，近壁区的网格必须有分辨能力分辨这些条带结构。文献 [33] 总结了采用 DNS/LES 模拟湍流边界层

时典型的网格尺寸，如表3所示，从表中可以知道，对于大涡模拟而言，壁面法向第一个网格单元的尺寸 $\Delta y^+ \approx 1$ ，且 $y^+ < 10$ 范围内至少要有3个网格点，流向和展向网格单元的尺寸范围则分别为50-100以及10-20，本文的工作中，通常取网格的展向尺寸 $\Delta z^+ \approx 15-20$ ，流向尺寸 $\Delta x^+ \approx 30-50$ ，近似为 Δz^+ 的2-2.5倍，计算结果表明取这样的数值是比较合理的。

表3 采用DNS/LES模拟湍流边界层时典型的网格尺寸（壁面单位）^[33]

	DNS	wall-resolving LES
Δx^+ (streamwise)	10-15	50-100
Δz^+ (spanwise)	5	10-20
$\min(\Delta y^+)$ (wall-normal)	1	1
number of points in $0 < y^+ < 10$	3	3

虽然上述参考值为计算网格的生成提供了指导，但实际上，对某一流动问题进行模拟前，以壁面单位定义的网格单元尺寸是未知的，也就是说，无法根据这些参考值生成满足要求的网格。这种情况下，通常的处理方法有三种：第一，根据其他研究者的类似工作确定网格单元尺寸；第二，通过壁面剪切应力/壁面摩擦系数的经验公式预估网格单元尺寸；第三，通过RANS方法进行定常计算，确定网格单元尺寸。一般来讲，采用这些方法生成网格并完成大涡模拟的计算后，还需要用LES的时均结果进行校验，确保该网格满足分辨率的要求。

第四章 程序验证

对于新发展的 CFD 程序，为了了解其性能指标，如计算结果的准确度、对不同流动问题的适用能力、程序自身的健壮性等，必须通过不同的算例、在各种计算条件下对程序进行大量的考核，以期发现问题、解决问题，这是程序逐步发展完善过程中必不可少的环节。

校验算例的选择，需要遵循两条原则：第一，流动具有代表性；第二，有实验/数值模拟结果可供对比。MPLES的目标是能够处理具有复杂几何边界的可压缩流动，特别是叶轮机械内部的复杂流动现象，因此，对其校验算例的选择，除用于LES程序考核的标准算例外，还需要具有复杂几何边界的代表性算例。基于以上考虑，本章选择了槽道湍流和圆柱绕流两种流动作为考核MPLES的算例：槽道湍流由于有DNS结果可供对照^{[22][300]}，成为检验LES新代码、新模型的标准算例之一；亚临界（subcritical）圆柱绕流既有复杂的几何边界，又存在层流分离、自由剪切层转捩等复杂流动现象^[301]，因而具有代表性。

考核过程中，通过改变参数设置，如修改亚格子模型系数取值范围、人工粘性系数等，对槽道湍流和圆柱绕流进行了广泛的测试，总结了各类参数变化对计算结果的影响，这为后面章节的数值模拟工作打下了坚实的基础。

4.1 槽道湍流的大涡模拟

平面槽道流是最易模拟的一类壁湍流：它的流向和展向都采用周期性边界条件，因而不存在设定进出口边条的问题。对槽道湍流的数值模拟已经有很长的历史：Deardorff（1970）使用 6720 个网格点，第一次对高雷诺数的槽道进行了大涡模拟^[82]，如此少的网格点显然无法再现近壁的复杂流动；Moin和Kim（1982）采用拟谱方法，对槽道流进行了大涡模拟^[88]，计算结果被用来研究湍流的近壁结构；直到 1987 年，Kim、Moin和Moser才首次实现了充分发展槽道湍流的直接数值模拟^[22]，其结果被广泛用于数值方法及湍流模型/亚格子模型的验证，这就是著名的KMM数据库^[300]。

以上例子都是针对不可压流动，对可压缩槽道湍流的数值模拟则出现的较晚：1995 年，Coleman等人对 $Ma = 1.5$ 和 3 的充分发展槽道湍流进行了直接数值模拟，分析了压缩性效应对湍流的影响^{[302][303]}；Gamet等（1999）采用紧致有限差分对 $Ma = 0.2$ 的槽道进行了直接数值模拟，由于马赫数很低，流场特征与不可压情况非常接近^[304]；Lenormand

等对 $Ma = 0.5$ 和 1.5 的亚音/超音槽道进行了大涡模拟，详细研究了网格疏密以及不同亚格子模型对计算结果的影响^{[253][254]}；后来，Mossi和Sagaut又对 $Ma = 0.5$ 和 1.5 的槽道进行了计算，其目的是为了比较不同激波捕获格式对大涡模拟结果的影响^[305]。国内科学院力学所的李新亮等也采用高阶紧致格式，对 $Ma = 0.8$ 的可压缩槽道湍流进行了直接数值模拟，并对结果进行了标度率分析^{[306][307]}。

4.1.1 流向体力项

图 30 给出了槽道湍流计算域的示意图， x 、 y 、 z 分别代表流向、法向和展向。为了保证流向的周期性，在不可压槽道流的模拟中，通常假设流体在均匀压力梯度的驱动下流动^[22]，亦即用流向压差平衡上下壁面的摩擦，具体的实现方式又分为两种^[308]：保持雷诺数 Re_τ （定义参见式(4.9)）不变和保持流量不变。第一种情况下，压力梯度恒定以平衡壁面摩擦，而流量随时间变化；第二种情况下，压力梯度随时间变化，用以保证流量为定值。

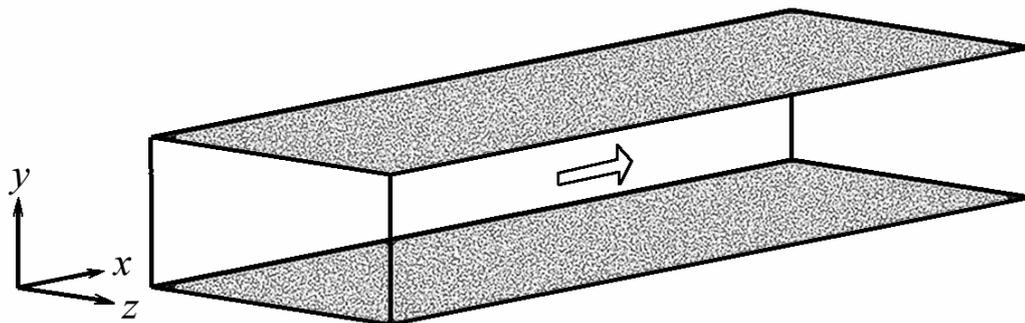


图 30 槽道湍流计算域示意图

求解不可压方程，计算的压强通常为局部位置上的压强偏离平均值的差值^[309]，这样计算压强也可以满足流向周期性条件。但是对于可压缩槽道湍流，如果流场仍是在平均压强梯度作用下流动，则由于槽道入口和出口的实际压强不同，必然影响到流场的密度、温度，使得流向的周期性条件不再成立^[306]。Coleman等提出了可压槽道湍流的计算模型，认为流场在均匀体力的作用下流动，亦即施加流向体力平衡壁面摩擦，这样流场的各物理量仍可满足流向的周期性条件^[302]。

具体实现时通常选择保持槽道流量恒定，为达到这一目标，流向体力必须随时间变化，文献 [253][254]给出了计算体力的公式，推导如下：

LES 控制方程组中，包含体力项 f_i 的流向动量方程可以写为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_1\tilde{u}_j) + \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\sigma}_{1j} - \tau_{1j}) + f_1 \quad (4.1)$$

对上式在统计均匀的 $x-z$ 平面内平均，然后沿壁面法向 y 积分，定义 $Q(t)$ 为通过 $y-z$ 截面的平均质量流量，容易得到 $Q(t)$ 的时间演化方程：

$$\frac{dQ}{dt} = L_y L_z f_1 + \frac{L_z}{\text{Re}} \left[\langle \mu \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \right]_{\text{low}}^{\text{up}} \quad (4.2)$$

这里 $\langle \cdot \rangle$ 代表沿 $x-z$ 平面的平均， L_x 、 L_y 、 L_z 代表槽道沿 x 、 y 、 z 方向的长度，up 和 low 代表上下壁面。又由于 $\left[\langle \mu \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \right]_{\text{up}} = - \left[\langle \mu \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \right]_{\text{low}}$ ，式(4.2)可改写为：

$$\frac{dQ}{dt} = L_y L_z f_1 - \frac{2L_z}{\text{Re}} \left[\langle \mu \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \right]_{\text{low}} \quad (4.3)$$

如果流量保持恒定 ($dQ/dt = 0$)，体力 f_1 必然随时间变化，文献 [253][254] 指出：直接使用(4.3)式会导致数值不稳定，建议使用下面的算法：

假设时间步 n 的体力 f_1^n 已知，那么时间步 $n+1$ 的体力 f_1^{n+1} 的计算公式为：

$$f_1^{n+1} = f_1^n - \frac{1}{L_y L_z} [\alpha(Q^{n+1} - Q_0) + \beta(Q^n - Q_0)] \quad (4.4)$$

其中 α 、 β 是调节参数，稳定性分析建议取值 $\alpha = 2$ 、 $\beta = -0.2$ ； Q_0 是预先设定的流量（常数）， Q^n 是时间步 n 流场的真实流量， Q^{n+1} 是采用下式计算的时间步 $n+1$ 的预测流量：

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \left(L_y L_z f_1 - \frac{2L_z}{\text{Re}} \left[\langle \mu \rangle \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial y} \right]_{\text{low}} \right) \quad (4.5)$$

流向动量方程加入体力项 f_1 后，为与其保持一致，能量方程右侧需要加入一项 $f_1 u_1$ ，数值实验表明，必须使用 $f_1 u_{1b}$ (u_{1b} 定义见 4.1.2) 代替 $f_1 u_1$ ，计算才能保持稳定。

4.1.2 定解条件及数据后处理

槽道计算的边界条件设置如下：流向和展向为周期性条件，流量 Q_0 按预设值保持恒定，上下壁面为等温无滑移条件，壁面温度为 T_w^* 。将槽道半高 h^* 设为参考长度，壁温 T_w^* 设为参考温度，体积速度 (bulk velocity) u_b^* 设为参考速度，于是雷诺数 $\text{Re} = \rho_b^* u_b^* h^* / \mu_w^*$ ，马赫数 $\text{Ma} = u_b^* / c_w^*$ 。其中 c_w^* 是由参考温度定义的声速，关于体积速度 u_b^* ，其定义为 [165]：

$$\begin{aligned}
u_b^* &= \int_{V^*} \rho^* u^* dV^* / \rho_b^* V^* \\
\rho_b^* &= \int_{V^*} \rho^* dV^* / V^* \\
u_b^* &= \int_{V^*} \rho^* u^* dV^* / \int_{V^*} \rho^* dV^*
\end{aligned} \tag{4.6}$$

槽道初场的速度、温度剖面按二维层流Poiseuille流动的解析解^[14]给出，为了使初始层流流场顺利“转捩”为充分发展的湍流流场，在流向速度中需要加入一定幅值的随机扰动，具体的初始条件如下^[253]：

$$\begin{cases}
\rho(t=0) = 1 \\
u_1(t=0, y) = u_{1\max} [1 - (y-1)^2] (1 + s\chi) \\
u_2(t=0) = 0 \\
u_3(t=0) = 0 \\
T(t=0, y) = 1 + (\gamma-1) \text{Pr} Ma^2 u_{1\max}^2 [1 - (y-1)^4] / 3
\end{cases} \tag{4.7}$$

这里设下壁面位置 $y=0$ ，上壁面位置 $y=2$ ，槽道中心最大速度 $u_{1\max}=1.5$ ， χ 是区间 $[-1,1]$ 的随机数， s 代表扰动幅值，本节所有算例均取 $s=0.2$ 。根据初始的层流速度型，流量 $Q_0 = \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \rho u_1 dy dz = \int_0^{L_z} \int_0^2 1.5 [1 - (y-1)^2] dy dz = 2L_z$ ，计算中保持不变。

图 31 给出了槽道算例 C4 (见 4.1.3) 计算过程中某些监测参数随时间的变化曲线，图(a)~(d) 分别对应：流量 Q 、流向体力 f_1 、上下壁面总的流向摩擦力 f_{wall} 和槽道内流体的总动能 E_{total} ，其中 $E_{total} = 1/2 \int_V \rho (u^2 + v^2 + w^2) dV$ 。这些曲线与文献 [310] 的结果非常类似，从图中可以看出，计算的初始阶段 ($t \sim 0-5$)，流量和流向体力存在大幅值的扰动，其幅值均随时间不断减小，到 $t \sim 5$ 时，流量 Q 已接近设定值 $Q_0 = 2L_z$ ，接下来的整个计算过程中， Q 围绕 Q_0 有轻微的上下脉动 (幅值极小，图中已无法分辨)。对于流向体力，在经历初期的扰动后，其发展趋势与壁面总摩擦曲线保持一致：槽道在随机流向速度扰动的作用下，从层流逐渐“转捩”为湍流， $t \sim 0-35$ 阶段， f_{wall} 缓慢增大， $t \sim 35-60$ 阶段， f_{wall} 剧烈增加，在 $t \sim 60$ 时达到峰值，随后稍有减小，到 $t \sim 150$ 时流动已基本达到统计平衡状态，成为充分发展的槽道湍流。容易看出， $t > 5$ 阶段， f_1 和 f_{wall} 曲线的趋势确实保持一致，而这正是式(4.3)的体现：体力随时间变化以平衡壁面摩擦，从而保证流量恒定。总动能 E_{total} 的变化，也体现了槽道“转捩”过程的特点，其数值不断减小，直

到统计平衡状态才稳定下来。总的来说，这些结果都证明了 4.1.1 流向体力算法的有效性。

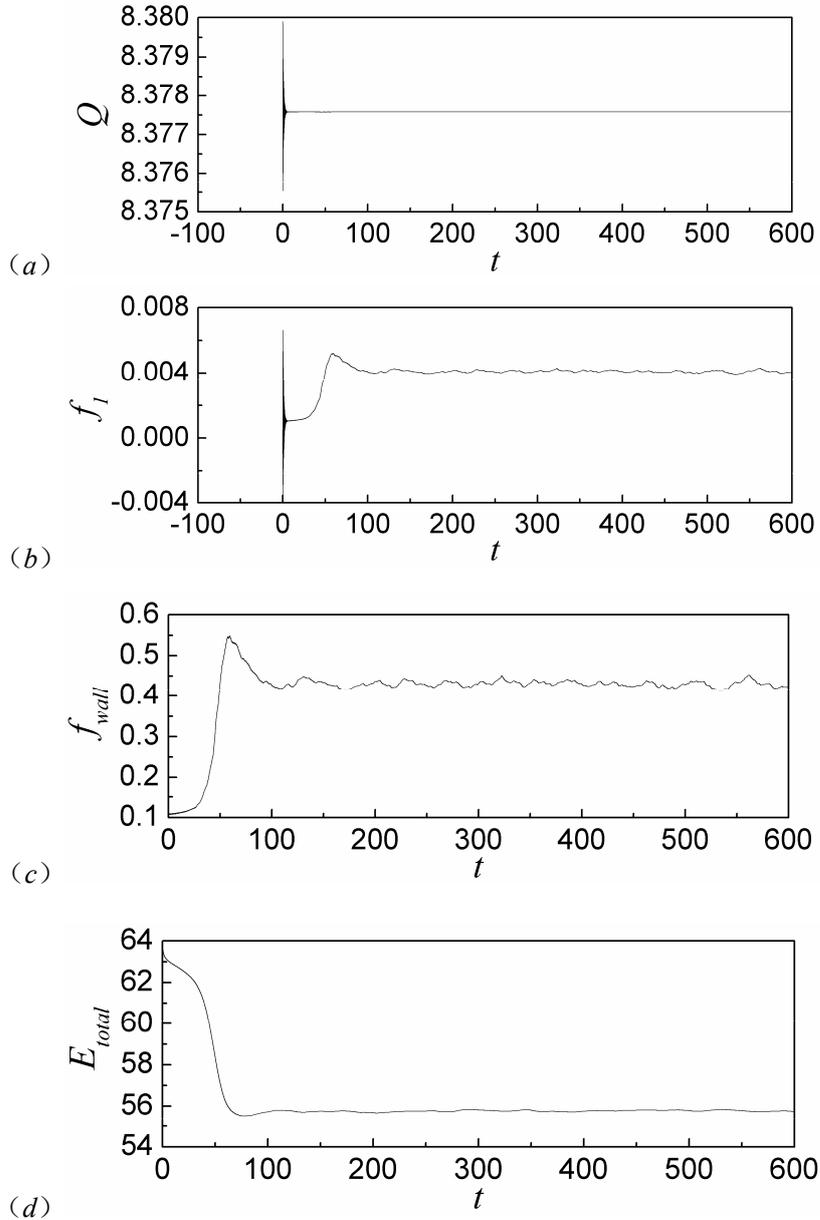


图 31 槽道计算中某些监测参数的时间序列 (a) 流量；(b) 流向体力；(c) 上下壁面总的流向摩擦力；(d) 槽道内流体的总动能

流动进入统计平衡状态后，就可以开始对瞬态流场进行统计采样了，但如何判断流场处于统计定常状态，却是首先需要解决的问题：文献 [300]认为，当总剪切应力 $-\overline{u'v'} + (1/\text{Re})\partial\bar{u}/\partial y$ 为直线、总动能出现准周期性时，流动到达统计定常状态；文献 [310] 则通过监测流量、流向体力随时间的变化曲线来判断。从图 31 容易发现， $t > 100$ 以后，流向体力、壁面摩擦、总动能虽然仍随时间变化，但其平均值接近定值，幅值也几乎恒

定，具有准周期性， $t > 150$ 时流动应该已处于统计定常状态。考虑到温度等物理量发展较慢^[165]，所有算例的采样均在 $t > 300$ 时才开始进行。

数据后处理方式如下：对统计定常状态的槽道，每 100 个时间步记录一个瞬态流场，采样时间大于 300，记录样本数大于 1000；由于流向和展向的周期性，统计除了按样本（时间）平均外，也在流向和展向（空间）进行了平均。

4.1.3 算例说明

为了深入了解各类参数变化对计算结果的影响，通过对亚格子模型系数取值范围、人工粘性系数等的调整，进行了 5 组计算，命名为算例C1~C5。5 个算例的计算域大小均为 $4\pi \times 2 \times 4\pi/3$ ，三个方向的控制体数目为 $64 \times 64 \times 64$ ，计算雷诺数 $Re = 3000$ ，马赫数 $Ma = 0.5$ ，计算的时间步长 $\Delta t = 0.003$ 。槽道的流向和展向为统计均匀方向，网格等间距分布，法向则对近壁区域加密，如图 32 所示。法向加密采用下式计算^[304]：

$$y_j = \frac{L_y}{2} [1 + C \tanh(K\eta_j)], \quad \text{其中} \quad \begin{aligned} K &= \text{Arg} \tanh\left(\frac{1}{C}\right) \\ -1 \leq \eta_j &= 2 \frac{j-1}{N-1} - 1 \leq +1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中 N 是法向网格点数， $y_j (j=1, N)$ 是网格法向坐标，取值范围 $[0, L_y]$ ， C 为常数，通过调节 C 值，可以改变第一层网格点到壁面的距离，这里取 $C = 1.120080625706$ 。

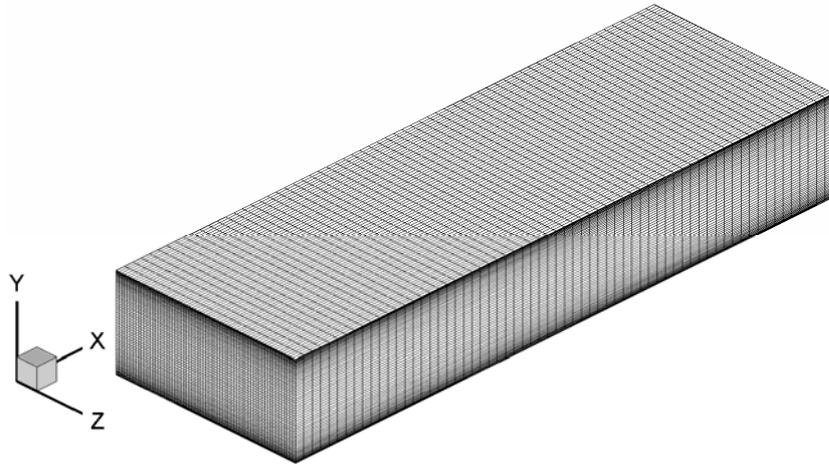


图 32 槽道计算域及计算网格

表 4 和表 5 分别列出了对 5 个算例的说明和相关计算参数设置：算例C1 没有使用亚格子模型，可以看作稀疏网格上的直接数值模拟（coarse DNS或quasi-DNS）；算例C2~C5 均采用动力模型，其主要差别在于模型系数取值范围不同，C5 中还加入了人工粘性。

表 4 槽道湍流算例说明

算例	无粘通量	人工粘性	亚格子模型	统计样本数	统计时间	原始编号
C1	4th-skew	None	None	1170 (1001~2170)	351	channel-3
C2	4th-skew	None	Dyn-Smag	1167 (1501~2667)	350.1	channel-4
C3	4th-skew	None	Dyn-Smag	1171 (1500~2670)	351.3	channel-7
C4	4th-skew	None	Dyn-Smag	1335 (1000~2334)	400.5	channel
C5	4th-skew	Yes	Dyn-Smag	1170 (1501~2670)	351	channel-5

附注 1: 4th-skew 代表四阶偏斜对称型格式

附注 2: Dyn-Smag 代表动力涡粘模型

附注 3: “统计样本数” 栏括号内数字代表统计所用样本文件范围

表 5 槽道湍流算例计算参数设置

算例	ε	人工粘性系数		亚格子模型系数		
		$k^{(2)}$	$k^{(4)}$	C	C_I	Pr_{sgs}
C1	N/A	N/A		N/A		
C2	0.001	N/A		0~0.04	0~0.01	0.4~0.8
C3	1.0	N/A		0~0.04	0	0.77
C4	1.0	N/A		0~0.04	0	0.3~1.0
C5	1.0	0	1.5625×10^{-4}	0~0.04	0	0.3~1.0

附注 1: ε 是更新SGS模型系数公式 $\phi^{n+1} = (1 - \varepsilon)\phi^n + \varepsilon\phi_{cal}^{n+1}$ 中的参数 [37][299]

附注 2: 动力模型计算得到的亚格子模型系数被限定了取值范围

表 6 列出了不同参考文献槽道算例与本节算例的计算参数及网格特征比较, 其中KMM是不可压槽道的DNS^[300], GDN和Li分别代表 $Ma = 0.2$ ^[304]和 $Ma = 0.8$ ^{[306][307]}的可压缩槽道DNS, LSP^{[253][254]}和MS^[305]则是 $Ma = 0.5$ 、采用不同亚格子模型的大涡模拟结果。表中列出了三个雷诺数, 分别定义如下:

$$\begin{aligned}
 Re_b &= Re_b = \rho_b^* u_b^* h^* / \mu_w^* \\
 Re_c &= \rho_c^* u_c^* h^* / \mu_c^* \\
 Re_\tau &= \rho_w^* u_\tau^* h^* / \mu_w^*
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

式中 Re_c 基于槽道中心变量定义^[302], Re_τ 则基于壁面摩擦速度 u_τ^* 定义, $u_\tau^* = \sqrt{\tau_w^* / \rho_w^*}$, τ_w^* 是壁面剪切应力。表中的 n_x 、 n_y 、 n_z 代表计算域三个方向的网格点数目, Δx^+ 和 Δz^+ 是采用壁面粘性长度定义的流向、展向网格单元尺寸 ($x^+ = u_\tau^* x^* / \nu_w^*$, 其余类推), Δy_{min}^+ 代表壁面第一层网格的高度, Δy_{max}^+ 则是槽道中心网格的高度。

比较表 6 中的数据容易看出: 所有算例的 Re_b 都在 3000 左右, Re_c 则在 3300 附近, Re_τ 除了算例C1 接近 220, 其余均在 180~200 这一范围。本节算例的计算域大小与KMM相同, 流向长度是其他结果的 2 倍, 关于计算域大小的选择, Jimenez和Moin^[311]提出了

“最小槽道流 (minimal channel flow)” 的概念，他们发现：当槽道的展向宽度大于近壁结构的典型尺度 (~ 100 个壁面粘性长度) 时，流动处于湍流状态，其低阶统计量与实验结果符合的很好，槽道的流向长度也存在类似结论。由此，可以通过减小流向和展向尺寸以节约计算时间，如GDN的DNS中，槽道展向宽度只有 0.908；但是，为了降低计算域尺寸对计算结果、特别是近壁流动结构的影响，还是应该选择较大的计算域，由于KMM有丰富的计算结果可供对照，这里的计算域与其保持一致，但三个方向的网格数均为KMM的一半，以此来检验亚格子模型。对比流向和展向的网格单元尺寸，本节算例的 Δx^+ 接近 40，稍大于作为对比的LES的长度 (~ 30)；展向宽度 Δz^+ 则较为一致，都在 12 左右。壁面第一层网格高度 Δy_{\min}^+ 对正确计算壁面剪切应力非常重要，因而都在 1 的量级；但是本节算例的槽道中心网格高度 Δy_{\max}^+ 却在 10 左右，远大于其他结果 (~ 6)，这是由于C1~C5 的法向网格数最少 (64)，而最为对比的LSP和MS虽然都是大涡模拟，但 $n_y = 119$ ，接近其两倍。综上所述，本文所用网格较其他LES结果更为稀疏，关于计算域大小、网格单元尺寸等对计算结果的影响，将在后文做具体分析。

表 6 计算参数及网格特征比较

	KMM ^[300]	GDN ^[304]	L _i ^{[306][307]}	LSP ^{[253][254]}	MS ^[305]	C1	C2	C3	C4	C5
类型	DNS	DNS	DNS	LES	LES	coarse DNS	LES	LES	LES	LES
Re_b	2793	-	3300	3000	3000	3000				
Re_c	3260	3300	-	3380	3338	3379	3366	3370	3361	3362
Re_τ	178.12	180	185	202	186	218.83	192.84	196.40	194.41	195.04
Ma	N/A	0.2	0.8	0.5	0.5	0.5				
L_x	4π	2π	2π	2π	2π	4π				
L_y	2	2	2	2	2	2				
L_z	$4\pi/3$	0.908	2π	$4\pi/3$	$4\pi/3$	$4\pi/3$				
n_x	128	34	101	41	41	64				
n_y	129	121	140	119	119	64				
n_z	128	32	101	65	65	64				
Δx^+	17.7	33	11.62	30	≈ 27	42.97	37.86	38.56	38.17	38.30
Δz^+	5.9	5	11.62	12	≈ 12	14.32	12.62	12.85	12.72	12.77
Δy_{\min}^+	0.054	1	-	1	0.5	1.16	1.02	1.04	1.03	1.04
Δy_{\max}^+	4.4	5	-	6	6.3	10.99	9.68	9.86	9.76	9.79

附注 1: LSP^{[253][254]}所列数据综合自文献 [253][254][305] (密网格, SGS模型为HSSMS模型)

附注 2: MS^[305]所列数据引自 [305]中的Jam-0-dyn算例 (未添加人工粘性, SGS模型为动力模型)

附注 3: 除GDN^[304]的 Ma 基于槽道中心速度定义外, 其余 Ma 定义均基于体积速度

附注 4: C1~C5 中的 Δy_{\min}^+ 是壁面第一层网格单元中心到壁面的距离

4.1.4 统计结果分析

表 7 给出了对某些统计量的比较，其中下标 c 代表槽道中心的统计量，下标 w 则是壁面的统计结果， C_f 为壁面摩擦系数，其定义为 $C_f = 2\tau_w^*/(\rho_b^*u_b^{*2})$ ^[312]。由文献 [312]可知，中心速度计算的公式为：

$$u_c = 1.28(2\text{Re})^{-0.0116} \quad (4.10)$$

当 $\text{Re} = 3000$ 时， $u_c = 1.157$ ，从表中可以看出，C2 的结果与其完全一致，C3~C5 的结果也非常接近，只有C1 差别较大，但仍好于LSP和MS。再对比 u_τ 、 u_c/u_τ 、 u_b/u_τ ，可以发现，除C1 外，C2~C5 的结果都和KMM符合较好，其中C3 与KMM最为接近。 ρ_c 和 ρ_w 缺少对比数据，但C2~C5 的数值完全相同；与LSP比较，C1~C5 的 ρ_c/ρ_w 和 T_c 偏小，由于缺少DNS/实验数据，无法区分哪个结果更为可靠。对于 C_f ，由文献 [312]，仍有经验公式：

$$C_f = 0.073(2\text{Re})^{-1/4} \quad (4.11)$$

当 $\text{Re} = 3000$ 时， $C_f = 0.00829$ ，比较发现，C3~C5 的数值与其接近，也优于LSP 和MS。总的来看，对表 7 中的统计量，算例C2~C5 都与其他结果符合较好，只有C1 偏差较大。

表 7 某些统计量的比较

	KMM ^[300]	Li ^{[306][307]}	LSP ^{[253][254]}	MS ^[305]	C1	C2	C3	C4	C5
u_c	1.167	-	1.165	1.15	1.162	1.157	1.158	1.155	1.156
u_τ	0.0638	0.056	0.0645	0.0595	0.0703	0.0620	0.0631	0.0625	0.0627
u_c/u_τ	18.30	-	18.05	19.36	16.53	18.67	18.35	18.49	18.44
u_b/u_τ	15.68	-	15.50	16.81	14.23	16.14	15.84	16.01	15.96
ρ_c	N/A	-	-	-	0.9990	0.9987	0.9987	0.9987	0.9987
ρ_w	N/A	-	-	-	1.038	1.037	1.037	1.037	1.037
ρ_c/ρ_w	N/A	-	0.956	-	0.962	0.963	0.963	0.963	0.963
T_c	N/A	-	1.047	-	1.039	1.038	1.038	1.038	1.038
C_f	0.00813	-	0.00869	0.00737	0.01025	0.00797	0.00826	0.00810	0.00815

图 33 给出了全局坐标和壁面坐标下流向平均速度剖面的对比，其中归一化速度 u^+ 定义为 $u^+ = u^*/u_\tau^*$ ，可以看出，速度未归一化时（图（a）），C1~C5 的剖面几乎重合在一起，C1 与其他四条曲线稍有差异；归一化以后（图（b）），C2~C5 与KMM结果非常吻合，近壁区满足 $u^+ = y^+$ ，对数区满足 $u^+ = 2.5\ln y^+ + 5.5$ ，但C1 从过渡区开始与其他结果出现偏差，到对数区， u^+ 明显偏小，从表 7 可以看出，这是由于C1 的 u_τ 值过大造成的。

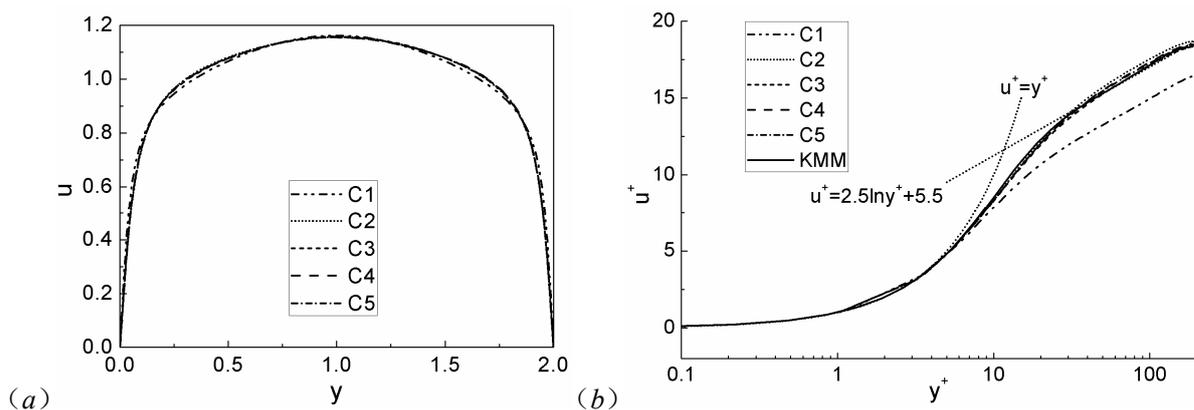


图 33 流向平均速度剖面对比 (a) 全局坐标; (b) 壁面坐标

图 34 给出了法向速度、压力、密度和温度四个平均量的对比。对于法向速度，其量级本身很小，5 条曲线中，C3~C5 重合在一起，沿槽道中心呈反对称，C1、C2 曲线与其趋势一致，但存在大的“2- Δ ”数值振荡，C2 的振荡幅值最大，沿 y 向几乎保持恒定，C1 的幅值则相对较小。分析原因，算例 C1 由于缺少亚格子模型，造成能量在网格单元尺度上的堆积，由此可能出现振荡；C2 则可能是允许亚格子模型系数 C_f 取值造成的计算不稳定的前兆，这一点将在后文进一步讨论。对于平均压力，C1~C5 曲线的趋势一致，但 C1 与其他结果数值上偏差较大，仔细观察 C2 发现：在距壁面 $\Delta y = 0.1$ 附近，压力出现一个波动，导致曲线不光滑，这可能是由对系数 C_f 取值范围的限定引起的。对于密度和温度曲线，C1~C5 均重合在一起，但是槽道中心附近，密度/温度曲线稍有上凸下凹，这和 LSP^[253] 接近水平的结果存在一些差异，其原因可能是因为本节算例槽道中心的网格较 LSP 太过稀疏。

图 35 给出了归一化雷诺应力项 $u'u'/(u_\tau)^2$ 、 $v'v'/(u_\tau)^2$ 、 $w'w'/(u_\tau)^2$ 、 $u'v'/(u_\tau)^2$ 的对比。对于 $u'u'/(u_\tau)^2$ ，C1~C5 预测的峰值都较 KMM 偏大，C1 相对接近，但峰值的位置偏小，C2~C5 的峰值位置与 KMM 一致，都在 $y^+ = 14$ 附近，C3~C5 的曲线更接近 KMM。对于 $v'v'/(u_\tau)^2$ ，除 C1 曲线与 KMM 较为接近外，C2~C5 的结果都与其存在较大差异，峰值偏小，峰值位置偏大，KMM 的峰值在 $y^+ = 52$ 附近，C2~C5 则在 $y^+ = 70$ 附近。对于 $w'w'/(u_\tau)^2$ ，C1 与 KMM 最为接近，但峰值位置偏小，C2~C5 的峰值较 KMM 小，但峰值位置均在 $y^+ = 36$ 附近。对于 $u'v'/(u_\tau)^2$ ，C2~C5 和 KMM 曲线几乎重合，C1 则存在较大的偏差，曲线峰值位置距壁面距离 $\Delta y = 0.18$ 左右。总体上似乎 C1 与 KMM 符合的更好，C2~C5 对 $u'u'/(u_\tau)^2$ 和 $u'v'/(u_\tau)^2$ 的预测较好， $v'v'/(u_\tau)^2$ 和 $w'w'/(u_\tau)^2$ 则偏差较大。

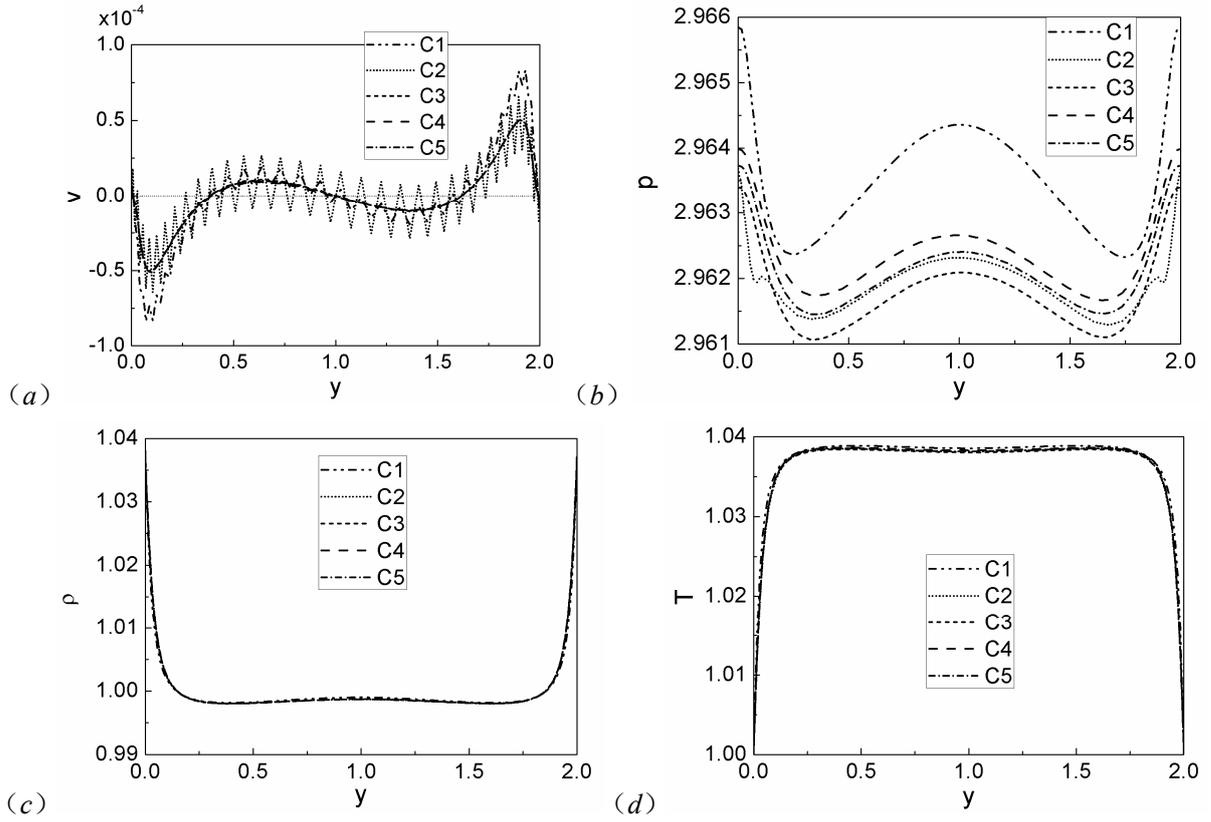


图 34 某些平均量的对比 (a) 法向速度; (b) 压力; (c) 密度; (d) 温度

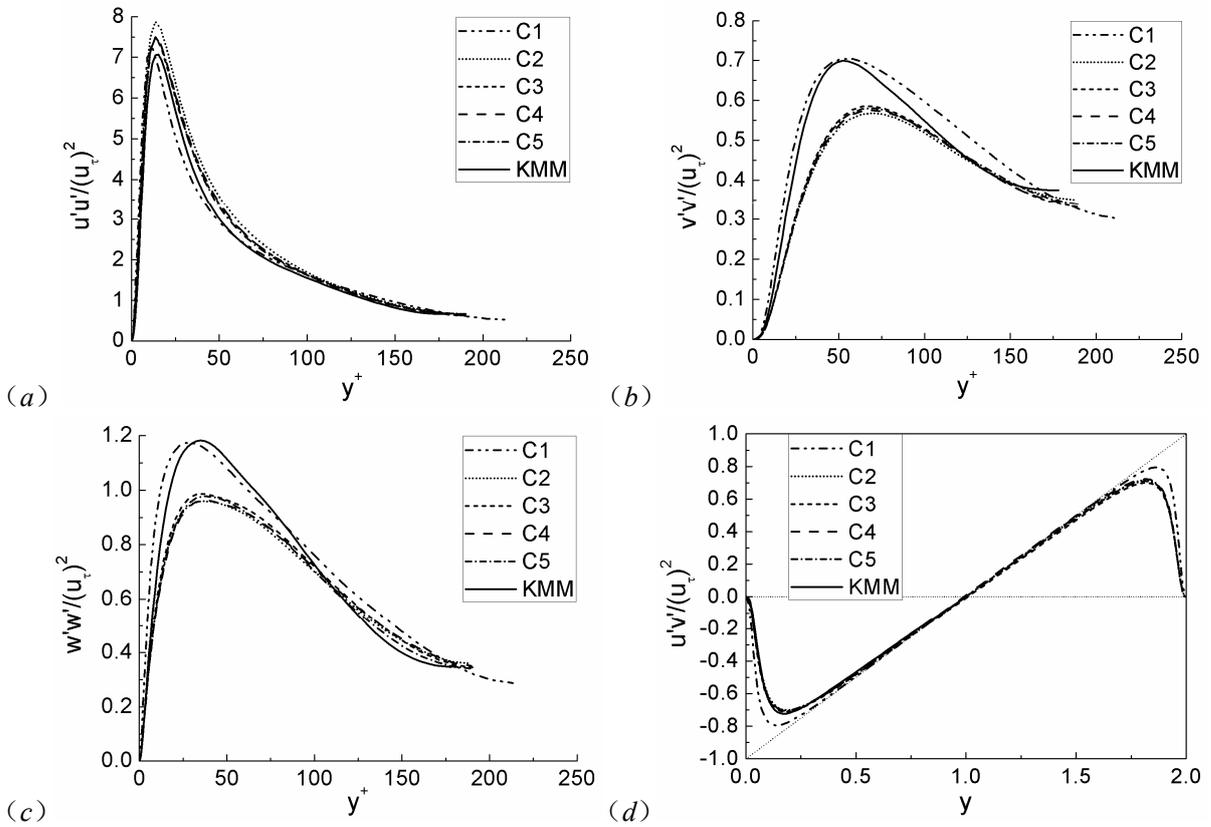


图 35 归一化雷诺应力的对比 (a) $u'u'/(u_\tau)^2$; (b) $v'v'/(u_\tau)^2$; (c) $w'w'/(u_\tau)^2$; (d) $u'v'/(u_\tau)^2$

图 36 给出了平均后的亚格子模型参数对比，包括SGS系数 C 和 C_l ，亚格子普朗特数 Pr_{sgs} ，以及亚格子粘性系数和分子粘性系数的比值 μ_{sgs} / μ 。对于系数 C 和比值 μ_{sgs} / μ ，图中C2~C5 的曲线都吻合的很好，二者均沿槽道中心呈对称的双峰结构， μ_{sgs} / μ 的峰值位置较 C 的更靠近壁面。显而易见，采用动力模型计算的系数 C 具有很好的近壁渐进特性，由此 μ_{sgs} / μ 也具有类似的特点，这充分证明了动力模型处理近壁流动的有效性：靠近壁面时，亚格子粘性系数会自动调整逐渐趋近到 0。虽然计算中限定 C 的取值范围为 $[0, 0.04]$ ，但实际上 C 的最大值在 0.011 左右，远小于其上限； μ_{sgs} / μ 的最大值只有 0.3，表明整个槽道中的亚格子粘性都小于分子粘性。所有算例中只有C2 允许系数 C_l 不为 0，限定其取值范围为 $[0, 0.01]$ ，从图 (b) 可以发现： C_l 也存在近壁渐进特性，但当距壁面的距离超过 $\Delta y = 0.1$ 时，采用动力模型计算的 C_l 将达到或超过上限 0.01，数值实验表明，如果不限定 C_l 的取值范围，过大的 C_l 会导致计算不稳定，前述 图 34 (b) 中 C2 平均压力曲线的波动也出现在距离壁面 $\Delta y = 0.1$ 的位置，该压力波动正是因为对 C_l 的截断而产生的。

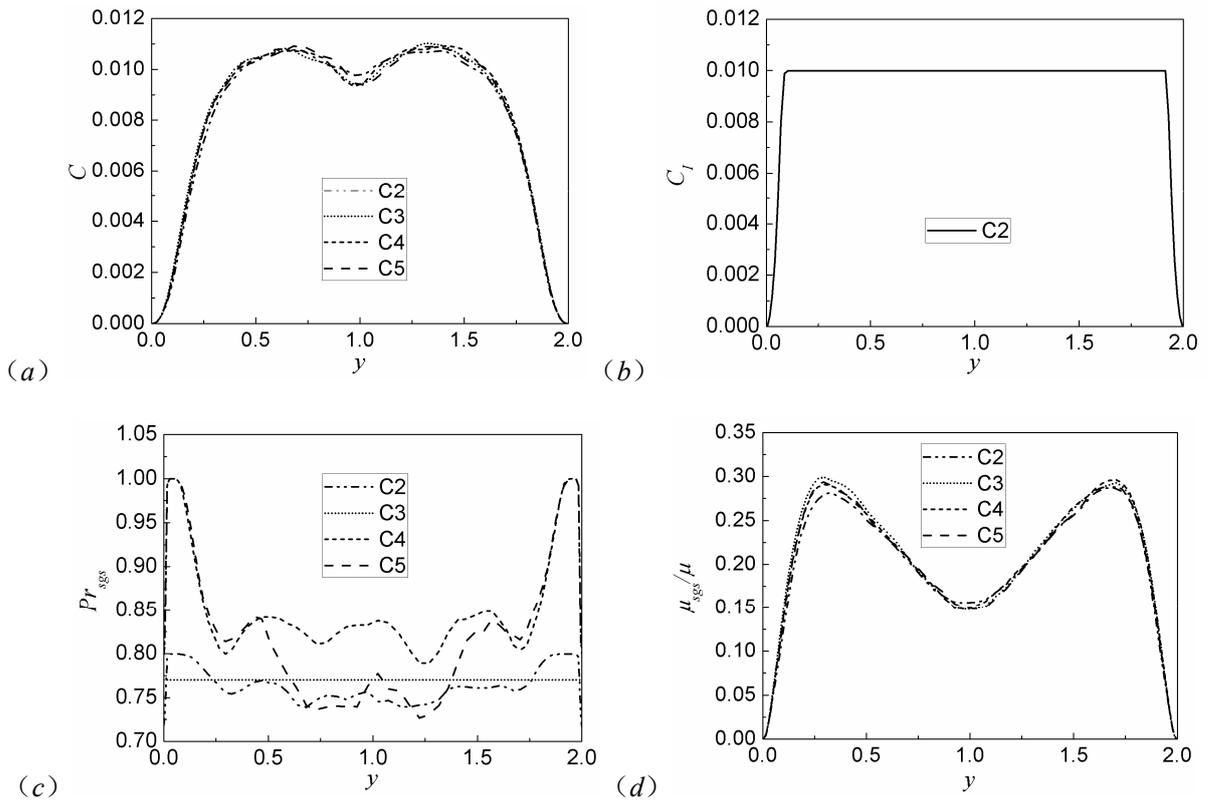


图 36 平均后的亚格子模型参数对比 (a) C ; (b) C_l ; (c) Pr_{sgs} ; (d) μ_{sgs} / μ

C_l 导致计算不稳定，是已被许多LES研究者所接受的观点，表 8 列出了部分文献中亚格子系数 C 、 C_l 和 Pr_{sgs} 的取值，可以看到，许多研究者在计算中均取 $C_l = 0$ ，文献

[314][321][248]等更是明确指出： C_I 会导致计算不稳定，因此设 $C_I = 0$ 。图 34 (a) 中算例C2 的法向速度振荡，可能就是由系数 C_I 引起的数值不稳定，如果不加以限制，其幅值可能继续加大，最后导致计算发散。因此，在后续的所有计算中，均取 $C_I = 0$ 。对于亚格子普朗特数 Pr_{sgs} ，表 8 中给出的数值也相当分散，最小为 0.4，最大取 1，很多采用动力模型的文献甚至都没有动态计算 Pr_{sgs} ，而是按常数给定，这可能是由于 Pr_{sgs} 的值对计算结果的影响较小。本文算例C2~C5 中 Pr_{sgs} 取值范围差异较大，但C2~C5 大部分结果吻合的很好，也印证了上述观点。从图 36 (c) 给出的 Pr_{sgs} 平均值可以看出，动态计算时，槽道大部分区域 Pr_{sgs} 的值都在[0.75,0.85]这一范围，只在靠近壁面的小部分区域接近或稍有超过 1.0，因此在后续的计算中，均设 Pr_{sgs} 的范围为[0.3,1.0]。

表 8 部分文献中亚格子系数 C 、 C_I 和 Pr_{sgs} 的取值

文献	C	C_I	Pr_{sgs}	说明
Pope [32]	0.0289	-	-	理论估计
Sagaut [37]	0.04	-	-	动力模型中 C 的上限
Lesieur [79]	0.01	-	-	多数研究者取值
Speziale et al [112]	0.012	0.0066	0.5	-
Moin et al [113]	0.008~0.014	0.0025~0.009	0.4,0.85	从 DNS 得到的系数
Lenormand et al [253]	-	-	0.5	动力模型
Gamet et al [313]	-	-	0.6	-
Bui [314]	-	0	-	-
Urbin et al [315]	0.00423	0	0.4	-
Zhao et al [316]	-	0	-	动力模型
Rizzetta et al [140]	≥ 0	≥ 0	≥ 0.2	动力模型
DeBonis et al [317]	0.012	0.00575	-	-
Garnier et al [318]	-	-	0.9	-
Sandham et al [319]	-	0	1	动力模型
Larchevêque et al [320]	-	0	0.72	-
Lee et al [321]	-	0	-	动力模型
Xiong [248]	-	0	-	动力模型
Andersson et al [322]	0.012	0.0066	-	-
Suh et al [278]	-	0	const.	动力模型

综合以上分析可以发现：本节的 5 个算例中，C1 算例因为缺少亚格子模型，计算结果偏差较大；C2 算例由于允许系数 C_I 取值，计算结果也受到影响；C3~C5 算例的结果接近，与 KMM 也符合较好，因而在下述分析中，除非特殊需要，不再列出所有结果，而只取代表性算例进行分析。

图 37 所示为算例C4 距壁面 $y^+ = 5.5$ 、32 和 190 位置脉动速度沿流向和展向的两点关联

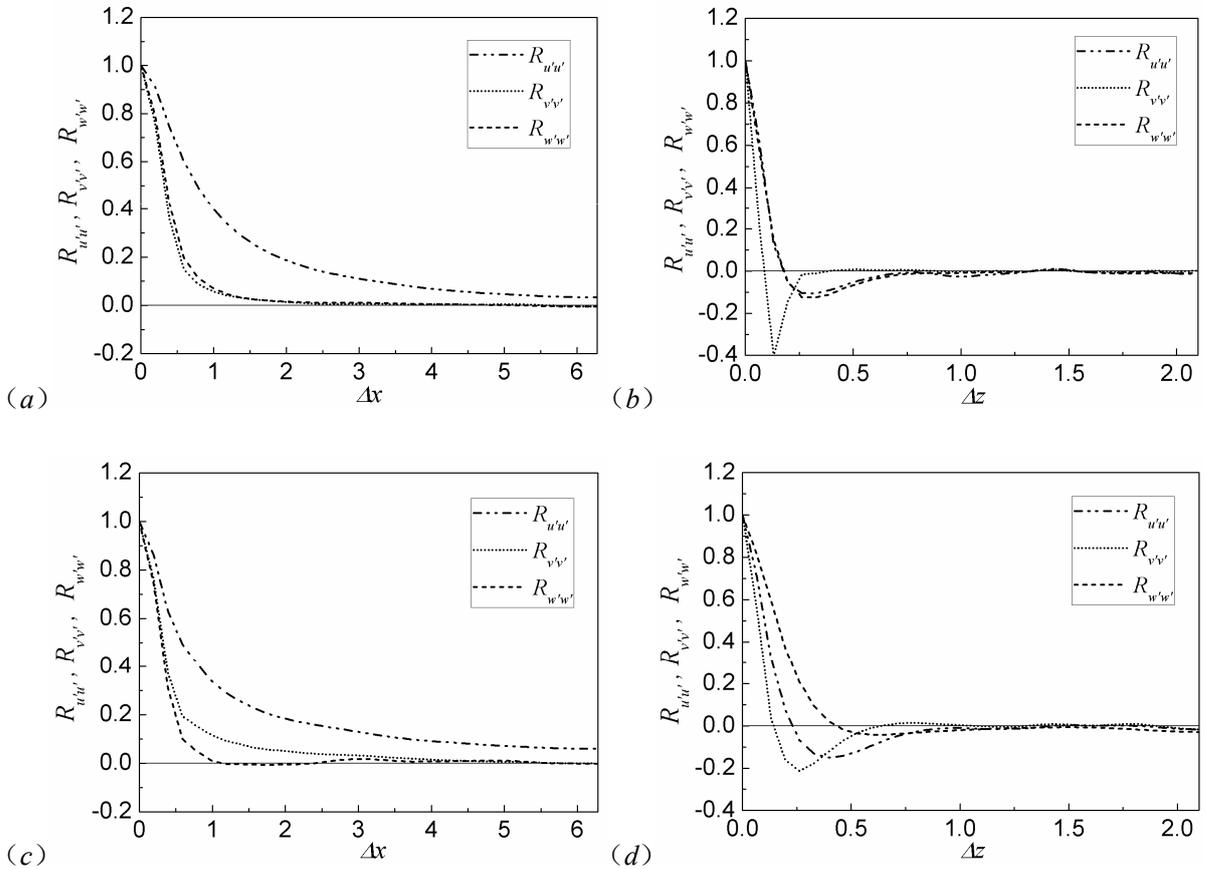
系数，其定义如下^[307]：

$$\begin{aligned} R_{u'u'}(\Delta x) &= \overline{(u'(x + \Delta x, y, z)u'(x, y, z))} / \overline{(u'^2(x, y, z))} \\ R_{v'v'}(\Delta x) &= \overline{(v'(x + \Delta x, y, z)v'(x, y, z))} / \overline{(v'^2(x, y, z))} \\ R_{w'w'}(\Delta x) &= \overline{(w'(x + \Delta x, y, z)w'(x, y, z))} / \overline{(w'^2(x, y, z))} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} R_{u'u'}(\Delta z) &= \overline{(u'(x + \Delta z, y, z)u'(x, y, z))} / \overline{(u'^2(x, y, z))} \\ R_{v'v'}(\Delta z) &= \overline{(v'(x + \Delta z, y, z)v'(x, y, z))} / \overline{(v'^2(x, y, z))} \\ R_{w'w'}(\Delta z) &= \overline{(w'(x + \Delta z, y, z)w'(x, y, z))} / \overline{(w'^2(x, y, z))} \end{aligned} \quad (4.13)$$

对于给定的法向位置 y 和某一流向/展向距离 $\Delta x / \Delta z$ ，式中“ $\overline{\quad}$ ”代表沿空间（流向 x 和展向 z ）和时间（不同样本）的双重平均，由于流向和展向的周期性， $R(\Delta x)$ 和 $R(\Delta z)$ 保持对称，因而 Δx 和 Δz 的最大值只需取 $L_x / 2$ 和 $L_z / 2$ 。

图 37 给出的三个位置， $y^+ = 5.5$ 和 32 靠近壁面， $y^+ = 190$ 则接近槽道中心，从图中可以看出，不管在哪个法向位置，当流向/展向距离增大时，三个速度脉动的关联系数都趋近 0，也就是说随着距离的增大，速度脉动几乎不再相关，这充分表明本文所取的计算域已经足够大，可以满足槽道模拟的要求。



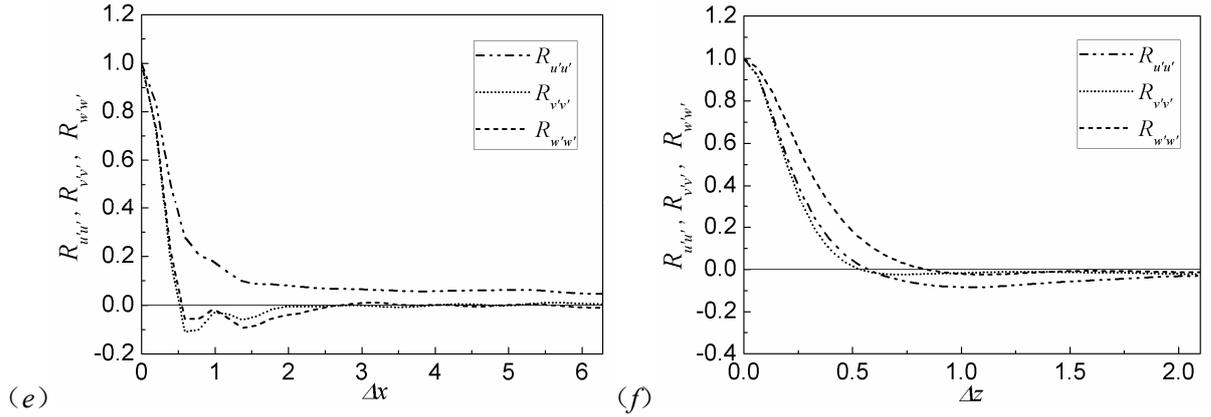


图 37 算例 C4 距壁面不同高度位置、脉动速度沿流向和展向的两点关联系数 (a) $y^+=5.5$ 流向; (b) $y^+=5.5$ 展向; (c) $y^+=32$ 流向; (d) $y^+=32$ 展向; (e) $y^+=190$ 流向; (f) $y^+=190$ 展向

图 38 给出了算例 C4 和 KMM 脉动速度高阶统计量的对比, 偏斜因子 (skewness)、平坦因子 (flatness 或 kurtosis) 的定义如下^[32]:

$$S(u') = \overline{u'^3} / \overline{u'^2}^{3/2}, S(v') = \overline{v'^3} / \overline{v'^2}^{3/2}, S(w') = \overline{w'^3} / \overline{w'^2}^{3/2} \quad (4.14)$$

$$F(u') = \overline{u'^4} / \overline{u'^2}^2, F(v') = \overline{v'^4} / \overline{v'^2}^2, F(w') = \overline{w'^4} / \overline{w'^2}^2 \quad (4.15)$$

偏斜因子是对脉动速度概率密度函数 (probability density function, PDF) 非对称性的无量纲度量, 如果 PDF 对称, 那么 $S = 0$; 平坦因子则表征了概率密度分布中大于标准偏差部分的相对权重^{[27][323]}。观察图 38 可以发现, 图中偏斜因子和平坦因子的曲线都是有很好对称性或反对称性的光滑曲线, 这表明算例 C4 的统计已具有足够长的时间跨度^[306], 也就证明了本节所有算例 > 300 采样时间的合理性。比较 C4 和 KMM 的结果, 三条平坦因子曲线都和 KMM 吻合较好, 偏斜因子 $S(u')$ 和 $S(v')$ 的曲线在发展趋势上和 KMM 一致, 数值上则存在一些差别 (KMM 的 $S(w')$ 曲线本身存在问题^[22], 故不做比较)。文献 [306] 中也给出了其 $Ma = 0.8$ 的可压缩槽道的偏斜因子和平坦因子曲线, 虽然缺少定量的比较, 但二者的趋势完全一致。

4.1.5 瞬态流场分析

图 39 是算例 C5 某瞬态流场的流向速度云图, 通过显示沿流向、法向和展向互相垂直的三个截面, 可以对充分发展槽道湍流的流动图画有一个总体上的认识: 虽然时空平均后的流向速度剖面是沿槽道中心对称的光滑曲线, 但瞬态的流场却具有很强的三维性, 法向截面距下壁面 $\Delta y = 0.1$ ($y^+ \approx 20$), 可以看到间隔分布的低速流向条带, 这是近壁相干结构的一个主要特征^[324]。

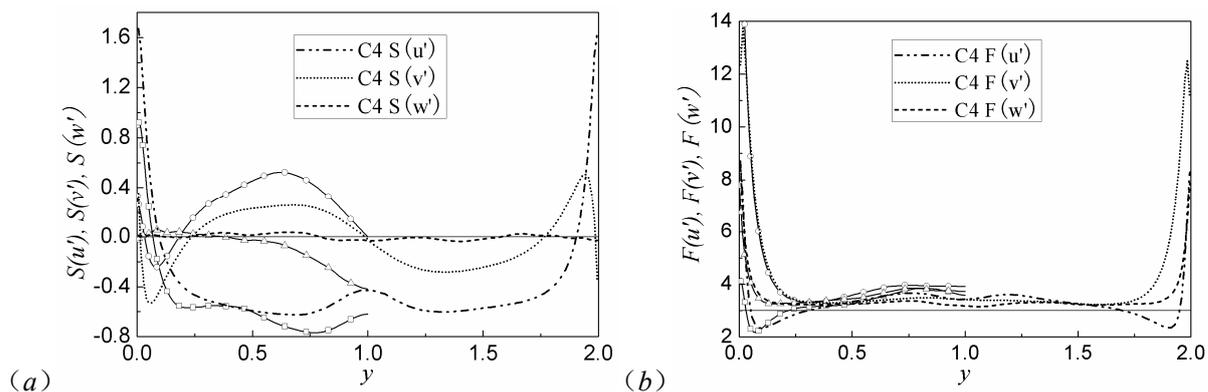


图 38 算例 C4 和 KMM 脉动速度高阶统计量的对比 (a) 偏斜因子; (b) 平坦因子 (KMM 只提供了半个槽道的结果)

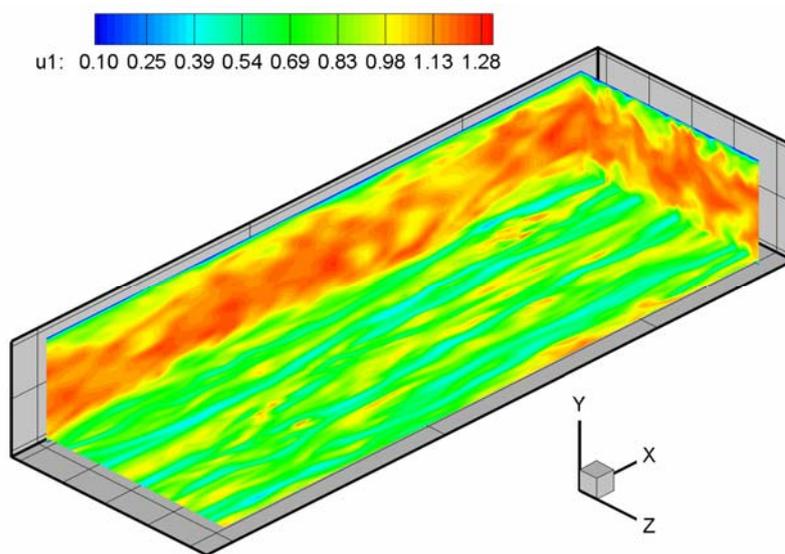


图 39 算例 C5 某瞬态流场的流向速度云图, 其中法向截面距下壁面 $\Delta y = 0.1$

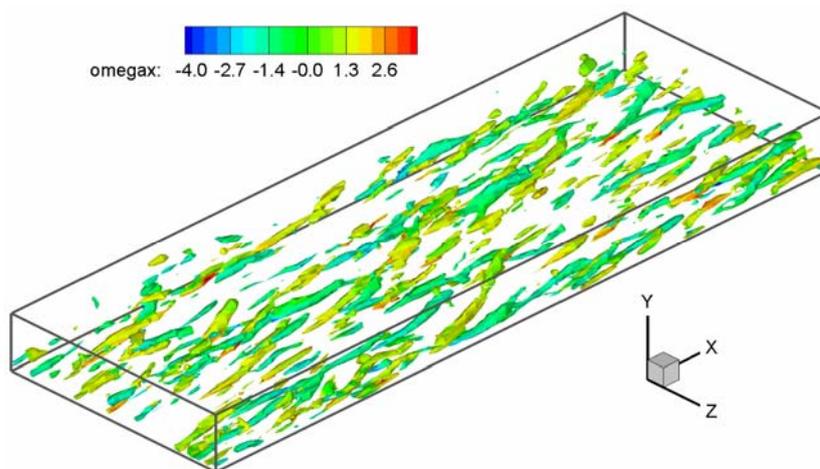


图 40 采用 Q 法则识别、算例 C5 某瞬态流场的大尺度相干结构, $Q = 0.55$, 等值面用流向涡量着色, 图中只显示了半个槽道

关于近壁湍流的产生和维持机制，以及它们与相干结构的关系，已经有很多的研究工作，但其机理到目前为止仍不十分清楚^{[28][29][30]}。图 40 给出了算例 C5 某瞬态流场的大尺度相干结构，图中结构采用 Q 法则识别，并以流向涡量着色，容易看出，流场中存在大量的准流向涡，其涡量或者为正、或者为负。这些准流向涡与壁面、流向均呈一定角度，在向下游运动的过程中不断演化发展。

图 41 给出了算例 C5 某瞬态流场距壁面不同高度位置的流向速度/流向速度脉动和温度云图，(a) ~ (c) 的高度分别为： $y^+ \approx 1$ 、 $y^+ \approx 10$ 和 $y^+ \approx 20$ ，图 (a) 的速度云图也代表了壁面流向剪切应力的分布。观察可以发现：各个位置的速度或速度脉动都存在间隔分布的低速条带，远离壁面，条带的间距也有所增加。温度云图中低温区域的分布也存在类似的结构：这表明二者似乎存在着强烈的正相关。为了验证这一推论，图 42 给出了算例 C5 中 u' 和 T' 关联系数 $R_{u'T'}$ 沿法向的分布， $R_{u'T'}$ 的定义如下^[325]：

$$R_{u'T'} = \frac{-\overline{u'T'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{T'^2}}} \quad (4.16)$$

容易看到，在近壁区域， u' 和 T' 确实存在很强的正相关。

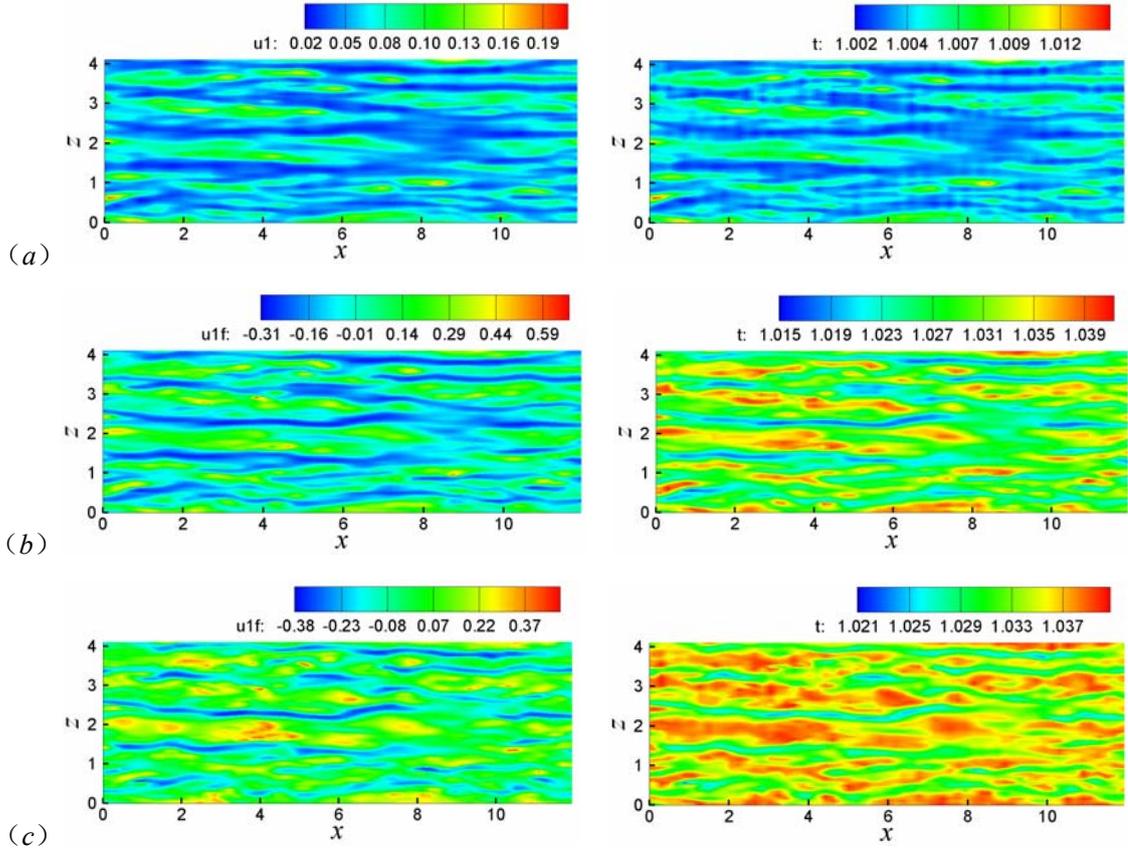


图 41 算例 C5 某瞬态流场距壁面不同高度位置的流向速度/流向速度脉动和温度云图 (a) $y^+ \approx 1$, u 和 T ; (b) $y^+ \approx 10$, u' 和 T ; (c) $y^+ \approx 20$, u' 和 T

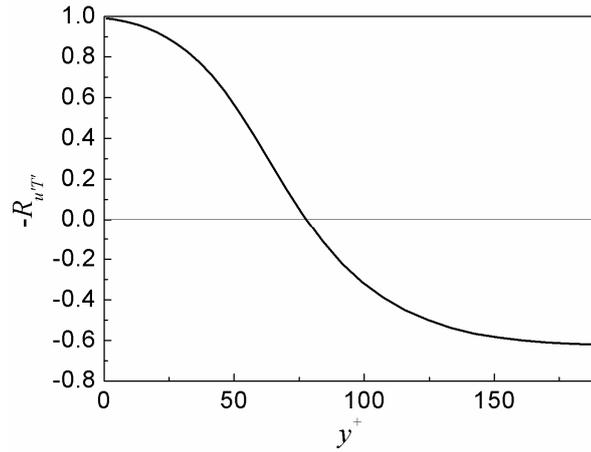


图 42 算例 C5 中 u' 和 T' 关联系数沿法向的分布

近壁相干结构研究为数不多的定量结论之一就是低速条带的平均间距 λ^+ 大约为 100 个粘性长度单位 [324]，文献 [22] 指出 λ^+ 可以通过流向速度脉动在展向的两点关联系数确定，如图 43 (a) 所示， $R_{u'u'}$ 取最小值时的 Δz 代表了高速区和低速区的平均距离，那么 λ^+ 就应该等于 $2\Delta z$ 。图 43 (b) 给出了算例 C5 条带平均间距 λ^+ 沿法向的分布，可以看出，随着 y^+ 的增大， λ^+ 也增大，这和 KMM 的趋势一致。但是，近壁区 λ^+ 的最小值为 116，较 100 偏大，文献 [306] 马赫数 0.8 的可压缩槽道给出了 $\lambda^+ = 115$ 的结果，可见可压缩条件下条带的间距确实有所增加。

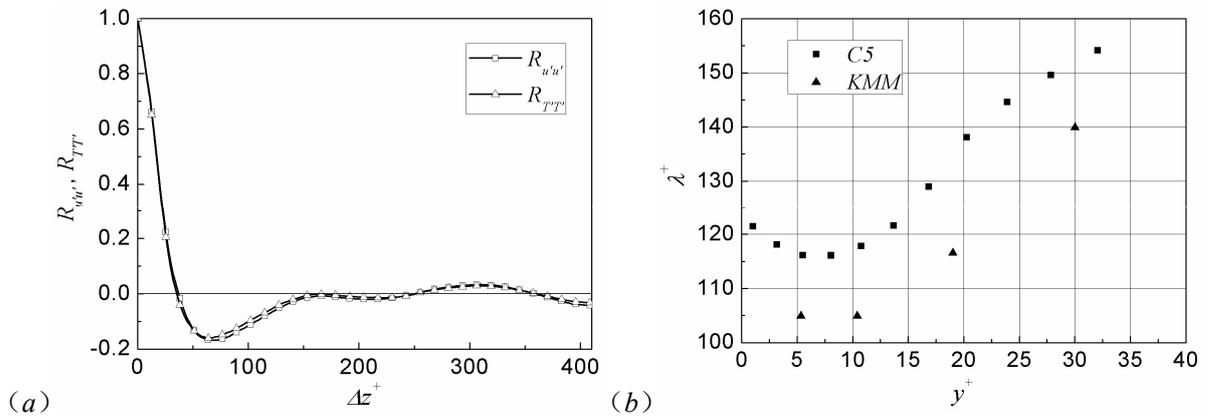


图 43 算例 C5 中 (a) $y^+ \approx 20$ 位置 $u'u'$ 和 $T'T'$ 展向两点关联系数曲线的对比；(b) 低速条带结构平均间距 λ^+ 沿法向的分布

图 44 给出了算例 C5 流向某截面的流向涡量、流向速度和温度云图，图 (a) 为流向涡量云图，显然，图中的正负流向涡量是和图 40 中的准流向涡结构对应的；或许正是由于准流向涡的作用，近壁低速流体向外抛出，槽道中心高速流体向壁面涌入，形成了流向速度云图中的蘑菇型结构；相比速度边界层，温度边界层更薄，温度梯度主要集中在

壁面附近，这和图 33、图 34 中的速度、温度的平均剖面是一致的。

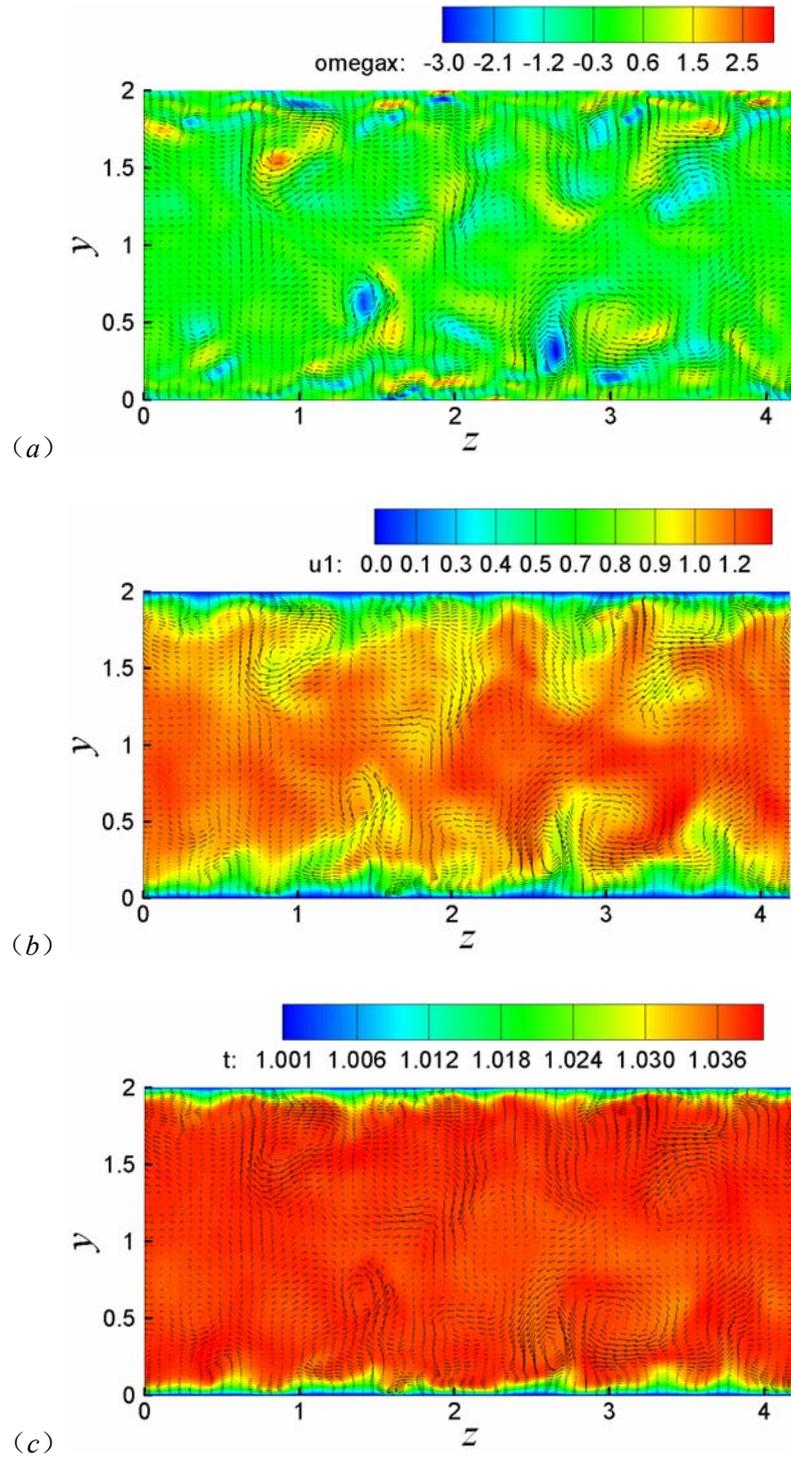


图 44 算例 C5 沿流向某截面的瞬态流场 (a) 流向涡量云图；(b) 流向速度云图；(c) 温度云图

4.2 圆柱绕流的大涡模拟

圆柱绕流是流体力学领域的经典问题之一，这种流动既没有固定的分离点，又存在

分离后的脱体涡和尾迹流，是典型的绕钝体流动，随着特征雷诺数（ $Re = \rho_{\infty}^* U_{\infty}^* D^* / \mu^*$ ，这里 ρ_{∞}^* 、 U_{∞}^* 分别是自由来流的密度和速度， D^* 是圆柱直径）的改变，尾迹流性质、脱体涡的形态均有很大变化，包含着极其丰富的流动现象^[179]，正因为如此，几十年来，在实验和数值模拟方面对这一问题都进行了大量的工作，相关的研究综述可见文献 [326][301][327][328]。

根据文献 [301]和 [329]的论述，随着雷诺数的增加，圆柱绕流的流动状态发生如下变化：当 $Re < 5$ 时，流动是定常的附体流；在 $5 < Re < 40$ 范围内，流动依然是定常层流，但是圆柱后出现一对对称的反向旋涡； $40 < Re < 190$ 时，出现层流的旋涡脱落，这就是人们熟知的卡门涡街；雷诺数超过 190，二维卡门涡街开始不稳定，出现波长约为 4 倍圆柱直径的展向大尺度波动，被称为A型不稳定，雷诺数接近 260 时，出现小尺度的三维扰动，其展向特征长度约为 1 倍圆柱直径，被称为B型不稳定；随着雷诺数的继续增加，三维的尾迹变得更加混乱，雷诺数达到 1200 左右，圆柱上分离的剪切层开始向不规则的湍流状态转变，但依据不同的流动条件，这一临界雷诺数在 300~3000 的范围内变化；当雷诺数介于 $2 \times 10^5 \sim 3.5 \times 10^6$ 之间时，发生所谓“阻力危机”现象，绕圆柱体的阻力突然下降，这和圆柱表面出现层流分离、分离流转捩、湍流再附、下游的再次分离等一系列复杂流动状态有关。发生“阻力危机”的最低雷诺数称为圆柱绕流的临界（critical）雷诺数，大于临界雷诺数的流动称为超临界（supercritical）流动，低于临界雷诺数的流动则称为亚临界（subcritical）流动。

对于亚临界流动，存在层流分离、自由剪切层转捩等复杂流动现象，而自由剪切层转捩对诸如自由流湍流度、噪声、圆柱振荡、端壁边界条件、圆柱长径比之类的环境参数非常敏感^[329]，这对数值模拟方法提出了极其苛刻的要求：数值格式、网格分辨率、湍流/亚格子模型、计算域大小、边界条件等都会给计算结果带来很大的影响；另一方面，由于数值计算不可能完全模拟环境条件，同时实验中也不可能完全控制环境参数，对环境参数的敏感性也给数值计算/实验结果的对照带来了困难。总之，亚临界圆柱绕流的计算是对数值模拟方法的巨大挑战。

近年来，随着计算机存储容量的增加和运算速度的提高，LES/DNS等高级数值模拟方法不断被应用到圆柱绕流的计算中。1994 年，Beaudan和Moin首次采用大涡模拟对圆柱绕流进行了系统研究^[330]，使用高阶迎风有偏格式（upwind-biased scheme）求解可压缩N-S方程，为了和PIV测量结果（Lourenco和Shih，简称LS）对照，计算雷诺数取 3900，大涡模拟得到的平均速度和雷诺应力与实验结果基本一致。但是，与Ong和Wallace^{[331][332]}

(简称OW)发表的近尾迹区 ($3D \leq x^* \leq 10D$) 新实验结果对比发现: 虽然平均速度型符合的很好, 但 $5D \leq x^* \leq 10D$ 区域的湍流强度却与实验结果不一致, 特别表现在速度能谱高波数区域的强烈衰减以及对雷诺应力项的显著低估: 这是由于高阶迎风有偏格式对尾迹区小尺度湍流的强烈数值耗散造成的^[329]。后来, Mittal和Moin^{[333][334][261]}又采用二阶中心差分对同一流体进行了大涡模拟, 这次求解不可压方程, 计算发现: 二阶中心差分的结果和实验符合较好, $5D \leq x^* \leq 10D$ 的能谱也在更高波数的范围内与实验一致, 他们由此得出结论: 无耗散的数值格式更适合被应用于大涡模拟。Breuer采用其发展的曲线坐标系下的大涡模拟程序LESOCC对 $Re = 3900$ 的圆柱绕流进行了计算, 详细研究了对流项的不同离散格式、网格分辨率、亚格子模型等对计算结果的影响^{[335][336]}, 最后确认: 大涡模拟中, 格式产生数值耗散的大小比格式的精度更为关键。此外, Breuer还对雷诺数高达 140000 的圆柱绕流进行了大涡模拟^[337], 得到了较好的结果。

2000 年, Kravchenko和Moin^[329]采用基于B样条的高精度数值方法和动力模型, 又一次对 $Re = 3900$ 的圆柱绕流进行了计算, 其结果和OW的实验符合的更好, 优于高阶迎风偏斜或二阶中心差分。Franke和Frank则^[338]使用有限体积法求解可压缩的N-S方程, 对 $Ma = 0.2$ 、 $Re = 3900$ 的圆柱绕流进行了大涡模拟, 他们发现较短的采样时间不能产生收敛的平均量, 当采样时间不断增加时, 统计结果和实验更为一致。Ma等^[339]采用 spectral/hp 方法, 对 $Re = 500 \sim 5000$ 的圆柱绕流进行了直接数值模拟和大涡模拟, 并详细分析了 $Re = 3900$ 的结果, 他们发现: 和 $x^* \sim D$ 位置的“U”型或“V”型平均速度剖面对应, 流动出现两种收敛态。最近, Dong等^[340]对 $Re = 3900/4000$ 和 10000 的圆柱绕流进行了直接数值模拟和PIV测量, 详细比较了两种雷诺数下流动的差别, 他们所用的数值方法与文献 [339]一致。

4.2.1 算例说明

为了和实验/数值模拟结果对照, 本节圆柱绕流算例的雷诺数取为 3900, 马赫数取 0.3 ($Ma = U_\infty^* / c_\infty^*$, 其中 c_∞^* 是自由来流的声速)。图 45 给出了与圆柱轴线垂直截面的计算域及网格示意图, 以圆柱中心为坐标原点, 自由来流方向设为 x 轴, 与之垂直的为 y 轴, 圆柱轴线方向定义为 z 轴, 计算域入口是半径等于 $10D^*$ 的圆弧, 出口则在 $x = 20D^*$ 位置, 横向边界位于 $y = \pm 10D^*$ 处。计算域的展向 (z 向) 长度则根据圆柱后流向涡结构的尺寸来确定^[329], 依照实验研究结果, 近尾迹流向结构的展向波长由下式确定

$$\lambda_z / D^* \sim 25 Re_D^{*-0.5} \quad (4.17)$$

$Re = 3900$ 时, $\lambda_z / D^* \sim 0.4$, 下游尾迹大尺度结构的展向波长 $\lambda_z / D^* \sim 1$ 。由此并参照其他文献, 本文计算域的展向长度取为 πD^* 。 $x-y$ 截面的网格为 C 型网格, 沿 C 向网格单元 (控制体) 数目为 340, 其中尾迹区分布 110 个网格单元, 圆柱表面分布 120 个网格单元, 与 C 正交方向则取 100 个网格单元, 网格生成采用了文献 [341] 所提供的方法; 相比 O 型网格, 采用 C 型网格的好处在于: 通过合理调整近壁及尾迹中心线附近网格的疏密, 使得网格方向与平均流方向大体一致, 可以更好的分辨尾迹流。从图 45 容易看出, 无论整体还是近壁区域, 网格的质量都非常高。沿圆柱展向, πD^* 的长度上取了 32 个网格单元, 因为展向是统计均匀方向, 网格均匀分布。整个计算域的网格数为 $340 \times 100 \times 32 = 1088000$ 。

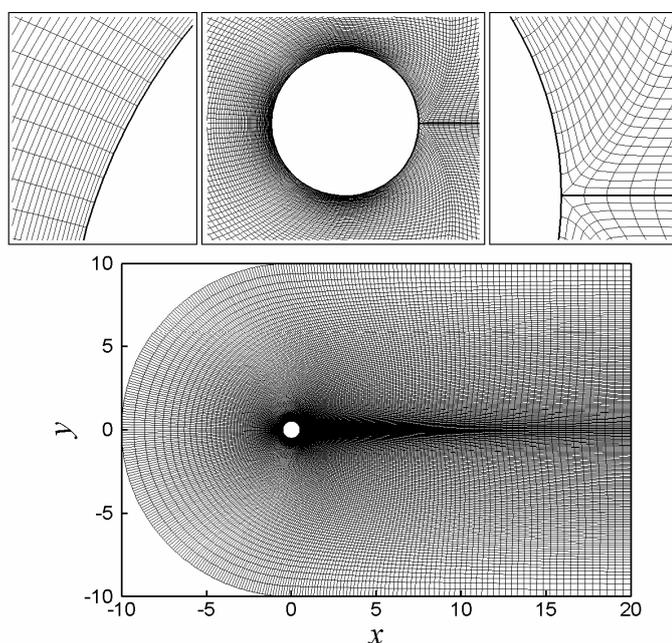


图 45 与圆柱轴线垂直截面的计算域及网格示意图 (上图为圆柱近壁面网格细节)

表 9 给出了本文和某些参考文献的计算域及网格参数设置对比, 其中 L_z 代表计算域的展向宽度, n_z 为展向网格数, n_{total} 为总的网格数, 可以看出, 本文的网格数较多数的参考文献稍少一些, 但基本可以满足大涡模拟的要求。

计算的边界条件设置如下: 圆柱表面为绝热无滑移壁面, 圆柱入口、出口以及横向边界都采用特征边界条件处理, 展向则设为周期性边界。初始计算在准二维的计算域内进行, 展向宽度 $L_z / D^* = \pi / 8$, 网格单元数取 4, 初始流场为均匀场, 当准二维流动计算到无量纲时间 100 左右时 (~ 20 个旋涡脱落周期), 取出某一瞬态流场, 沿展向复制 8 次, 作为其他完整算例的初场。所有算例的时间步长均取为 $\Delta t = 1.3 \times 10^{-3}$ 。

表 9 计算域及网格参数设置对比

算例	网格类型	L_z / D^*	n_z	n_{total} (万)	说明
MM [261]	C	π	48	231	-
Breuer[335]	O	π	32	87	-
KM [329]	O	π	48	133	多块网格, 局部加密
FF [338]	O+H	π	32	114	靠近圆柱区域为 O 型, 外区为 H 型
Present	C	π	32	109	-

附注 1: KM 的参数取自文中 case 2

圆柱绕流最显著的特征之一就是旋涡的周期性脱落、形成卡门涡街, 图 46 给出了算例 C2 (见 表 10) 升力系数和阻力系数随时间变化的曲线, 其中的升力系数曲线具有明显的周期性, 围绕 $C_L = 0$ 位置上下波动, 这正是由于圆柱后旋涡的交替脱落形成的。从初场开始, 流动推进超过 50 个旋涡脱落周期 ($t \sim 250$) 后, 开始记录数据, 总的采样时间取为 20 个左右的旋涡脱落周期 (~ 100), 采样时间间隔均为 $20\Delta t$, 总的样本数目在 3800 左右。由于展向是统计均匀方向, 计算统计量时, 除了按样本进行时间平均外, 也沿展向进行空间平均。

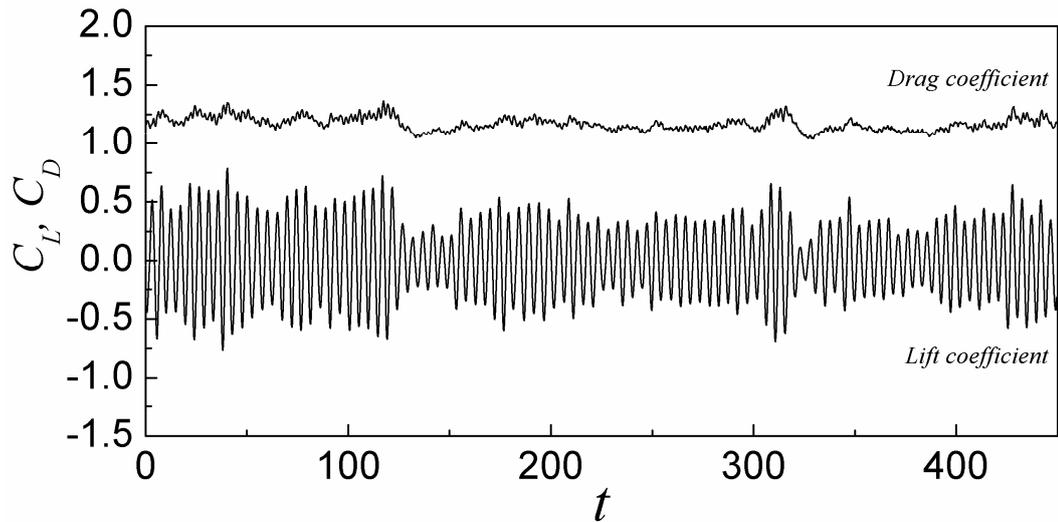


图 46 算例 C2 升力系数 C_L 、阻力系数 C_D 随时间变化的曲线

表 10 给出了本节圆柱绕流算例的计算参数设置, 其中亚格子模型均为动力涡粘模型; 参考 4.1 节, 模型系数设定如下: C 限制范围 $[0, 0.04]$, $C_I = 0$, Pr_{sgs} 限制范围 $[0.3, 1.0]$ 。表中共列出了 10 个算例, 其中的 C0、C1nosgs、C2nosgs、C3nosgs 和 C5 均因为缺少亚格子模型, 计算发散, C4nosgs 虽然没有亚格子模型, 但人工粘性足够大, 因而计算收敛。所以后文的结果分析只涉及算例 C1、C2、C3、C4 和 C4nosgs, C1~C4 算例均采用动力模型, 唯一差别在于人工粘性逐渐增大, C4nosgs 算例人工粘性设置同 C4, 但没有使用动力模型。

表 10 圆柱绕流算例的计算参数设置

算例	SGS 模型	人工粘性系数		计算收敛 性	总采样 时间	采样时间 间隔	原始编号
		$k^{(2)}$	$k^{(4)}$				
C0	No	0	0	发散	N/A	N/A	cylinder-qdns
C1	Yes	0	7.8125×10^{-4}	收敛	21T	$20\Delta t$	cylinder-1cont
C1nosgs	No			发散	N/A	N/A	cylinder-1nosgs
C2	Yes	0	3.125×10^{-3}	收敛	21T	$20\Delta t$	cylinder-2cont
C2nosgs	No			发散	N/A	N/A	cylinder-2nosgs
C3	Yes	0	7.8125×10^{-3}	收敛	22T	$20\Delta t$	cylinder-3cont
C3nosgs	No			发散	N/A	N/A	cylinder-3nosgs
C4	Yes	0.25	0.015625	收敛	23T	$20\Delta t$	cylinder-4cont
C4nosgs	No			收敛	21T	$20\Delta t$	cylinder-4nosgs
C5	No	0	0.015625	发散	N/A	N/A	cylinder-5nosgs

附注 1: T 为旋涡脱落周期

4.2.2 统计结果分析

表 11 列出了对某些统计参数的比较, 其中 L_{rec} 代表平均回流区的长度, 即沿尾迹中心线从圆柱尾缘点到流向速度为 0 点的距离 (参见图 47 和图 48); θ_{sep} 则是圆柱表面流动的平均分离角 (取前缘滞止点位置 $\theta = 0$), St 是 Strouhal 数。从表中可以发现, 对于 L_{rec} , 已有的实验或者数值模拟结果, 互相之间存在较大的偏差, 大概在 1.1~1.6 范围内变化, 同一作者的数值模拟, 也由于计算域、网格疏密的不同而造成结果的巨大差异。从 C1 到 C4, 随着人工粘性的增加, L_{rec} 也从 0.952 变化到 1.683, C4nosgs 的结果则介于 C3、C4 之间。对于 θ_{sep} 和 St , C1、C2 和其他结果符合的较好, 其他稍差一些。

图 47 (a) (b) 分别给出了尾迹中心的平均流向速度分布, 以及圆柱表面平均展向涡量的分布, 图 (a) 中, 各条曲线趋势一致, 平均速度从 0 开始减小, 达到一个极小值, 然后逐渐增大, 再次变为 0, 这里对应的就是回流区的长度, 流向速度继续增加, 大概在 $x = 3$ 位置, 增加趋势变缓。可以看出, C2 的曲线和 LS 的实验结果符合的最好, KM 的大涡模拟预测的最小流向速度的绝对值偏大。但在 $x > 5$ 的区域, C1、C2 的结果与其他出现一些偏差。图 (b) 的结果, 5 个算例符合的较好, 平均展向涡量先增大, 后减小, 第一次取 0 位置对应的就是平均分离角 θ_{sep} 。

表 11 某些统计参数的比较

算例	L_{rec}	θ_{sep}	St	说明
Cardell	1.33 ± 0.2	-	0.215 ± 0.005	Exp

OW	-	-	0.215 ± 0.005	Exp
Dong et al. [340]	1.47	-	-	Exp
	1.37-1.59	-	-	DNS
Ma et al. [339]	1.12	-	0.203	DNS case I
	1.59	-	0.219	DNS case II
Breuer [335]	1.115	87.9°	-	LES C2
KM [329]	1.35	88.0°	0.210	LES
FF [338]	1.64	88.2°	0.209	LES
C1	0.952	88.2°	0.211	LES
C2	1.124	87.2°	0.210	
C3	1.415	86.6°	0.208	
C4	1.683	86.0°	0.205	
C4nosgs	1.562	86.1°	0.208	

附注 1: Cardell 的数据转引自文献 [338]

附注 2: OW 的数据转引自文献 [329]

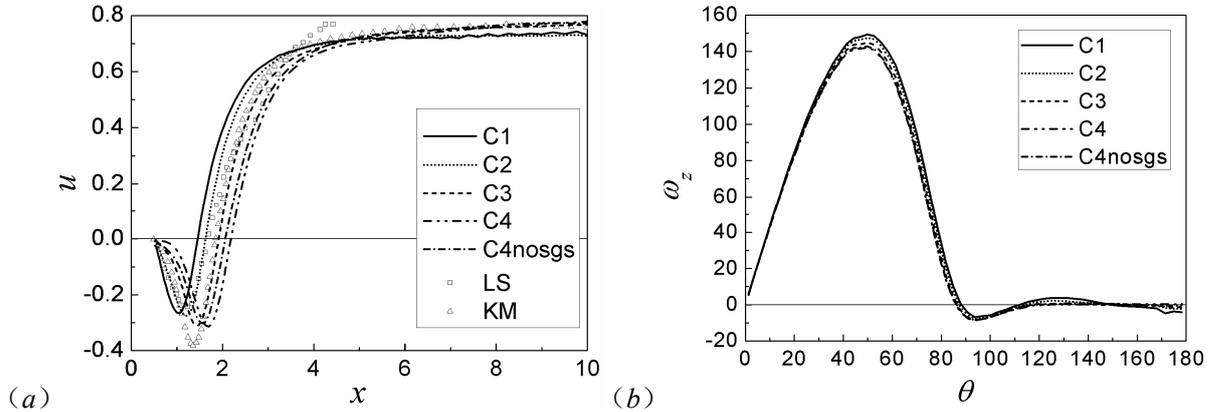


图 47 (a) 尾迹中心的平均流向速度分布 (b) 圆柱表面平均展向涡量的分布

图 48 给出了 5 个算例的时均流线图，从中可以看到时均回流区的概貌，容易看出，回流区包含一对反向旋转的旋涡，具有很好的对称性。

图 49 给出了圆柱尾缘附近平均展向涡量的等值面， $|\bar{\omega}_z|_{\min} = 2.58$ ， $\Delta\bar{\omega}_z = 0.64$ ，实线表示涡量为正，虚线表示涡量为负，显然，等值面最外圈的取值就是 $|\bar{\omega}_z|_{\min} = 2.58$ ，可以看到：所有结果都有较好的对称性，与平均回流区的长度相对应， L_{rec} 大，则涡量等值面的“双臂”长， L_{rec} 小，则“双臂”短。由于 C3 的 L_{rec} 值和文献 [340] 的最为接近，因而它们的图像也最为相似。

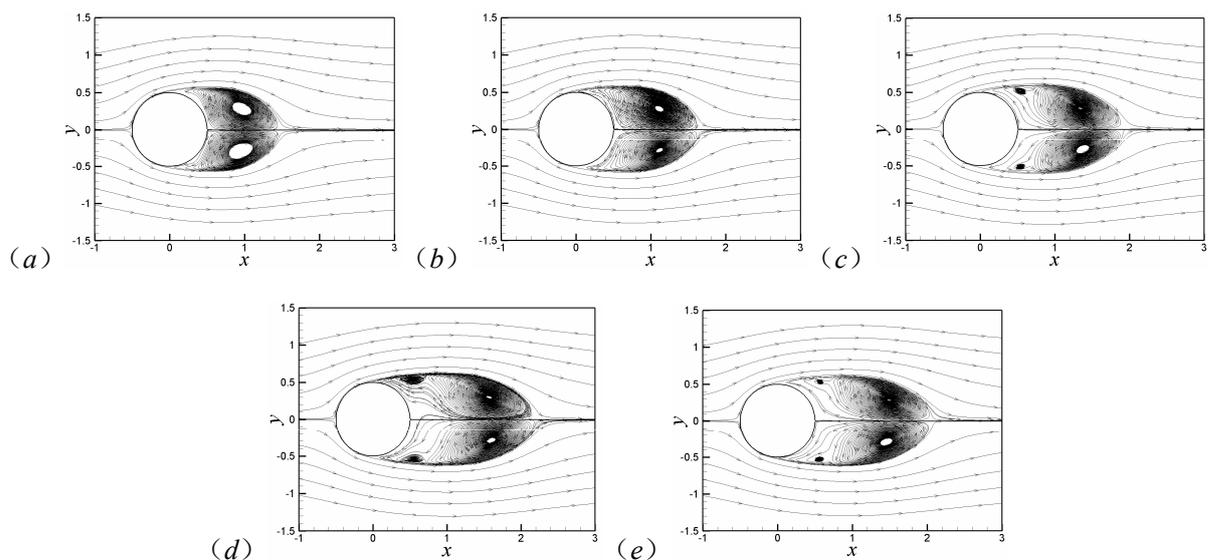


图 48 5 个算例的时均流线图 (a) C1; (b) C2; (c) C3; (d) C4; (e) C4nosgs

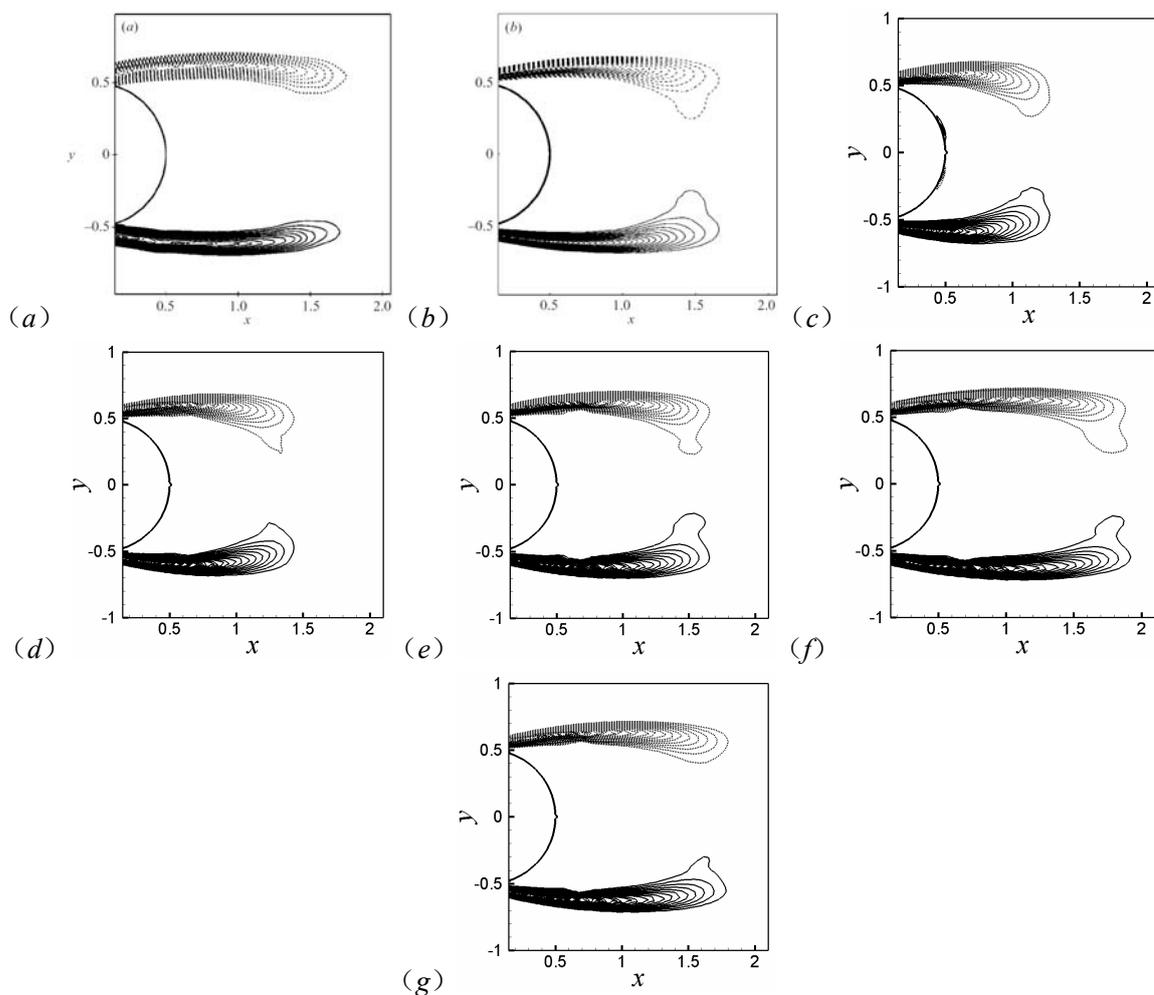
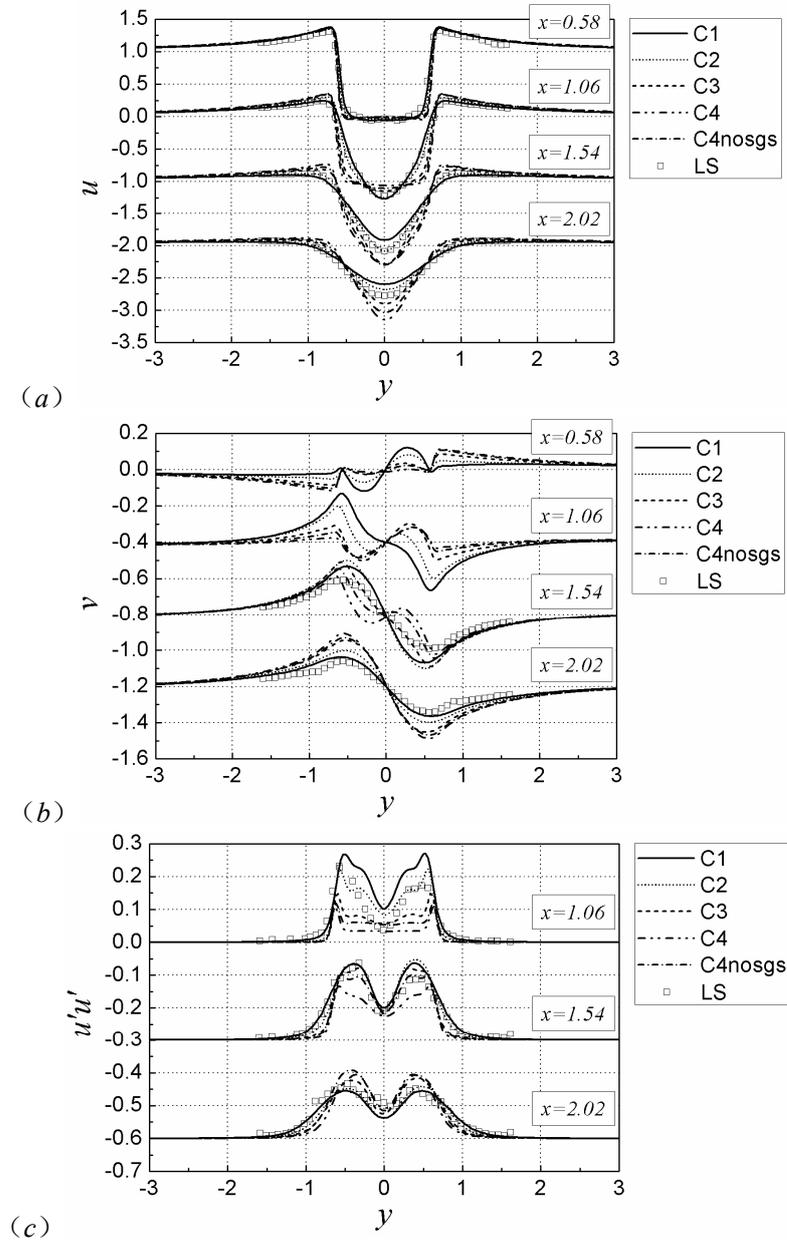


图 49 平均展向涡量的等值面, $|\bar{\omega}_z|_{\min} = 2.58$, $\Delta\bar{\omega}_z = 0.64$, 实线表示正值, 虚线表示负值 (a) $Re = 4000$, PIV^[340]; (b) $Re = 3900$, DNS^[340]; (c) C1; (d) C2; (e) C3; (f) C4; (g) C4nosgs

图 50 给出了 $x < 3$ 区域几个位置一阶和二阶统计量的比较, 其中 (a) 是流向平均速度 \bar{u} , (b) 是横向平均速度 \bar{v} , (c) ~ (e) 分别是雷诺应力 $\overline{u'u'}$ 、 $\overline{v'v'}$ 和 $\overline{u'v'}$ 。对于图 (a) 的流向平均速度, $x = 0.58$ 位置, 几个结果都符合的很好; 到了 $x = 1.06$ 位置, 出现了所谓的“U”型和“V”型速度剖面, 其中 C1、C2 呈 V 型, 与 LS 的结果符合的很好, C3、C4 和 C4nosgs 则呈 U 型; $x = 1.54$ 位置, C2 与 LS 符合最好, C1 偏大, 其他偏小; $x = 2.02$ 位置, C1、C2 均偏大, 其他偏小, 相对说来 C2 最为接近。对于图 (b) 的横向平均速度, 只有 $x = 1.54$ 和 2.02 位置有实验结果, 容易看出, C1、C2 与 LS 较为符合, 其他相差较远。对于雷诺应力项, $\overline{u'u'}$ 和 $\overline{v'v'}$ 有部分实验结果可供对照, 对于 $\overline{u'u'}$, 仍是 C1 符合较好, $\overline{v'v'}$ 则差别相对较大。



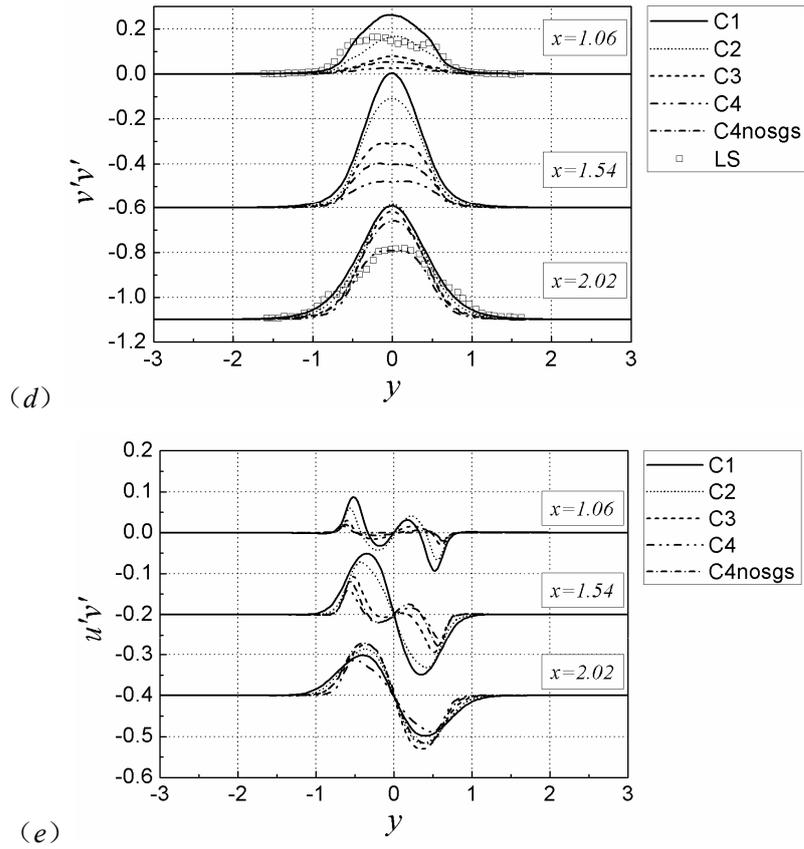
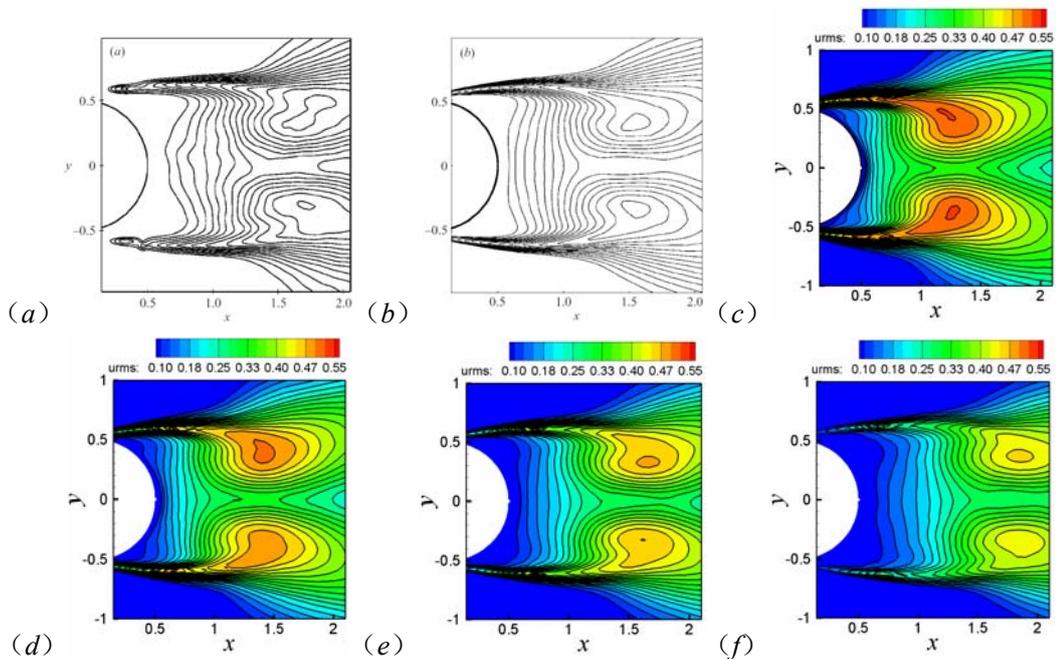


图 50 $x < 3$ 区域一阶和二阶统计量的比较 (a) 流向平均速度 \bar{u} ; (b) 横向平均速度 \bar{v} ; (c) 雷诺应力 $\overline{u'u'}$; (d) 雷诺应力 $\overline{v'v'}$; (e) 雷诺应力 $\overline{u'v'}$

由于LS的实验数据相对较少，且精度较差，图 51 和 图 52 分别给出了流向均方根脉动速度 u_{rms} 和雷诺应力项 $\overline{u'v'}$ 的等值面，相关说明见图题，可以看出，和回流区长度对应，C3 的结果与实验/DNS结果符合的最好。



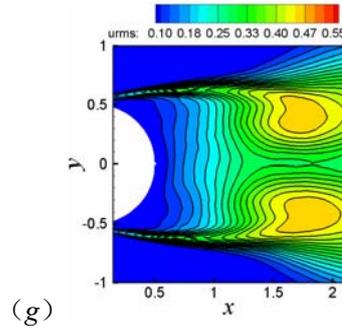


图 51 流向均方根脉动速度的等值面, $u_{rmsmin} = 0.1$, $\Delta u_{rms} = 0.025$ (a) $Re = 4000$, $PIV^{[340]}$; (b) $Re = 3900$, $DNS^{[340]}$; (c) C1; (d) C2; (e) C3; (f) C4; (g) C4nosgs

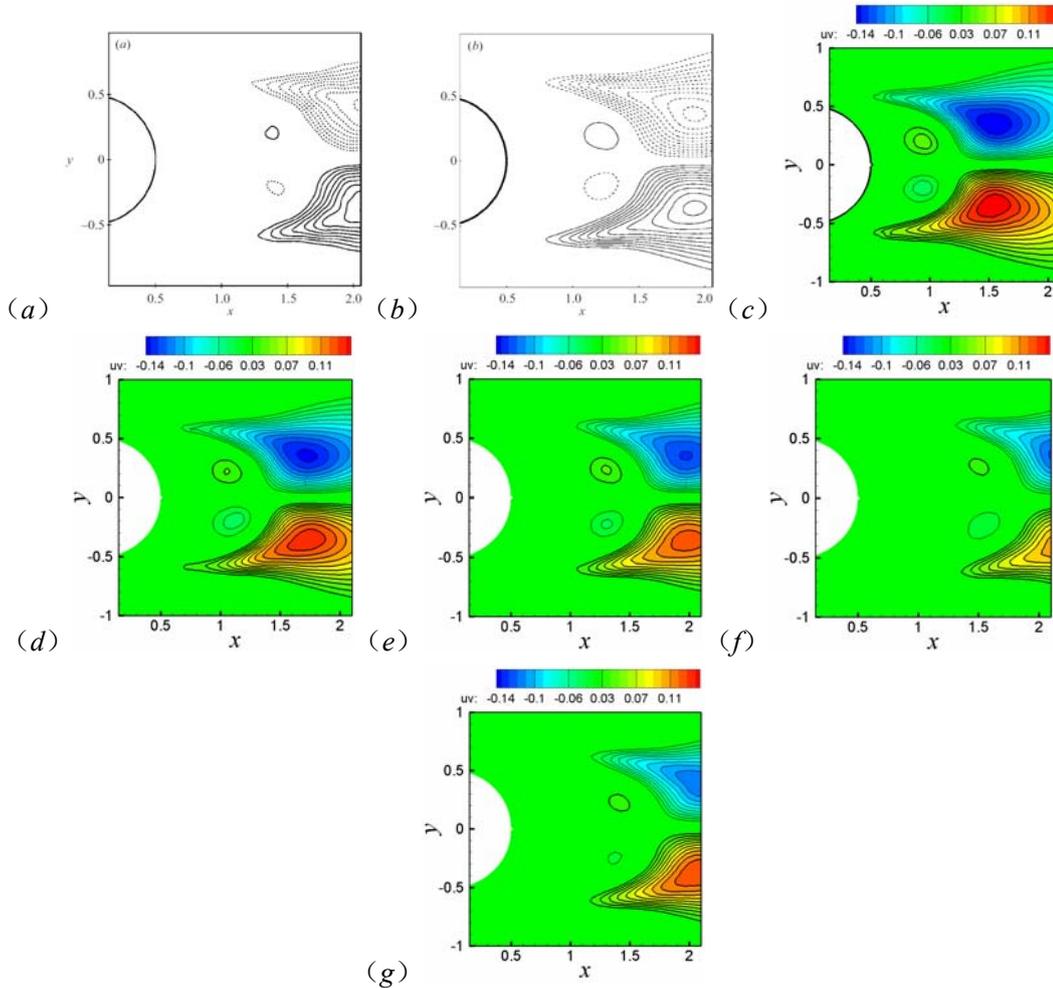
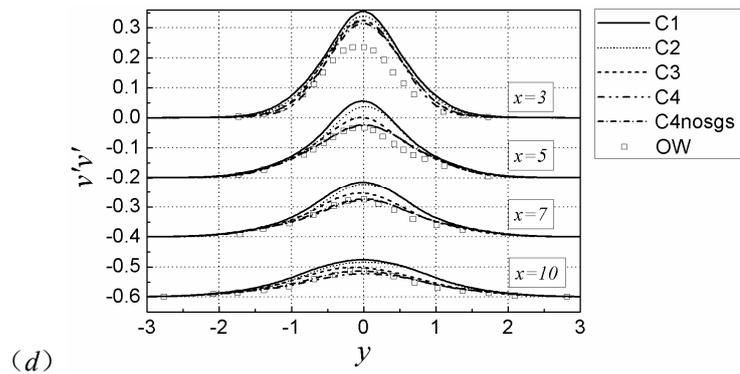
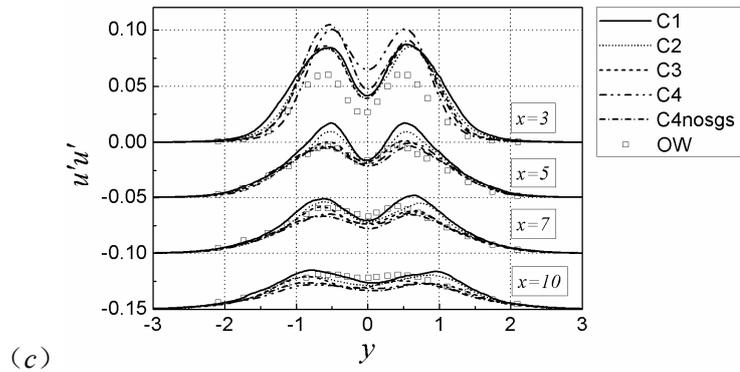
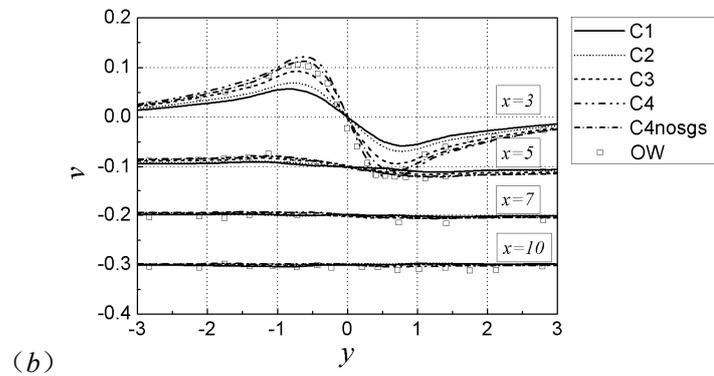
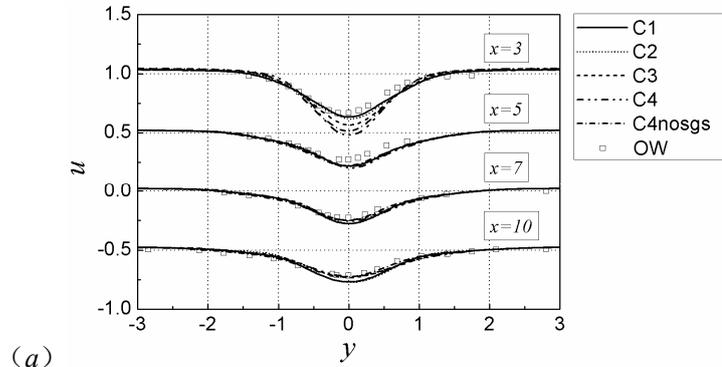


图 52 雷诺应力 $\overline{u'v'}$ 的等值面, $|\overline{u'v'}|_{min} = 0.03$, $\Delta \overline{u'v'} = 0.01$, 实线表示正值, 虚线表示负值 (a) $Re = 4000$, $PIV^{[340]}$; (b) $Re = 3900$, $DNS^{[340]}$; (c) C1; (d) C2; (e) C3; (f) C4; (g) C4nosgs

图 53 给出了 $3 \leq x \leq 10$ 区域几个位置一阶和二阶统计量的比较, 其中 (a) 是流向平均速度 \bar{u} , (b) 是横向平均速度 \bar{v} , (c) ~ (e) 是雷诺应力 $\overline{u'u'}$ 、 $\overline{v'v'}$ 和 $\overline{u'v'}$ 。对于流向平均速度, C1、C2 的结果和OW的实验测量最为一致, 对于横向平均速度, $x = 3$ 位置处, C1 和C2 预测的结果偏小, 这和前述 $x < 3$ 区域的结论不一致, 其原因可能是由于LS和

OW实验条件存在差异，导致两个实验的平均回流区长度不一样造成的。对于雷诺应力项 $\overline{u'u'}$ 和 $\overline{v'v'}$ ，实验结果都较数值模拟结果偏小，其中C1 偏差最大，C2 次之，这可能是由于C1、C2 数值粘性较小，因而流场中的数值扰动较大造成的。对于 $\overline{u'v'}$ 项，C1 和C2 则符合较好。



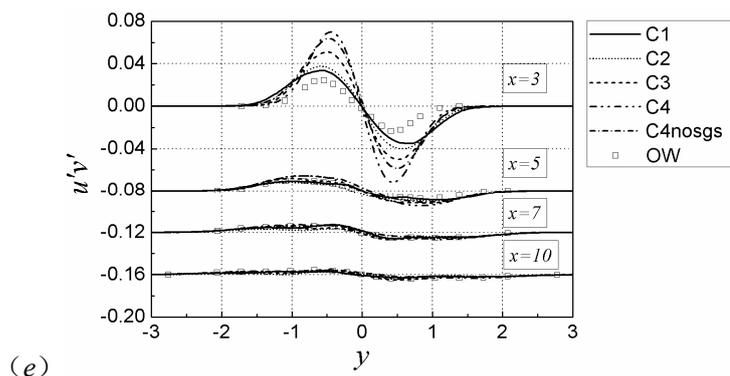


图 53 $3 \leq x \leq 10$ 区域一阶和二阶统计量的比较 (a) 流向平均速度 \bar{u} ; (b) 横向平均速度 \bar{v} ; (c) 雷诺应力 $\overline{u'u'}$; (d) 雷诺应力 $\overline{v'v'}$; (e) 雷诺应力 $\overline{u'v'}$

图 54 给出的是不同算例亚格子粘性系数同分子粘性系数比值 μ_{sgs}/μ 的平均值云图，其中图 (a) ~ (d) 分别对应算例 C1 ~ C4，算例 C4nosgs 由于不包含亚格子模型，所以不存在对应的图画。所有图中粘性系数比值的分布都具有对称性，除 C1 外，其他算例的最大值均位于时均回流区的尾缘附近，随着回流区长度的增加，最大值的位置也不断后移；对于给定的流向位置，存在两个对称的极值点，随着 x 的增大，极值点的间距也不断增加，C2 ~ C4 中，极值的数值随 x 的增加而持续减小，从 C2 到 C4，衰减的速度越来越快。分析上述现象出现的原因，从 C1 到 C4，计算中加入的人工粘性不断增加，圆柱表面边界层分离形成自由剪切层所感受到的扰动逐渐减小，流动失稳转捩的位置后移，回流区长度增加， μ_{sgs}/μ 最大值的位置也随之后移；另一方面，随着人工粘性的增强，尾迹区大尺度结构被耗散的速度越来越快，传播的距离不断减小，由此也导致 μ_{sgs}/μ 当地极值沿流向的快速衰减。

总的来说，由于实验/数值模拟条件的差异，导致流动收敛到两个流态，平均流向速度出现“U”型和“V”型两种剖面，分别对应于较长的和较短的平均回流区尺寸，这给程序的校验带来了困难。本节的 5 个算例中，由于人工粘性及亚格子模型的差别，随着人工粘性的增加，平均回流区长度增加，发生流态转变；又由于人工粘性会影响亚格子模型作用的发挥，在结果合理的前提下，总是期望尽量减小人工粘性的效应，因而这里认为 C2 或 C3 算例的人工粘性系数取值较为合理。

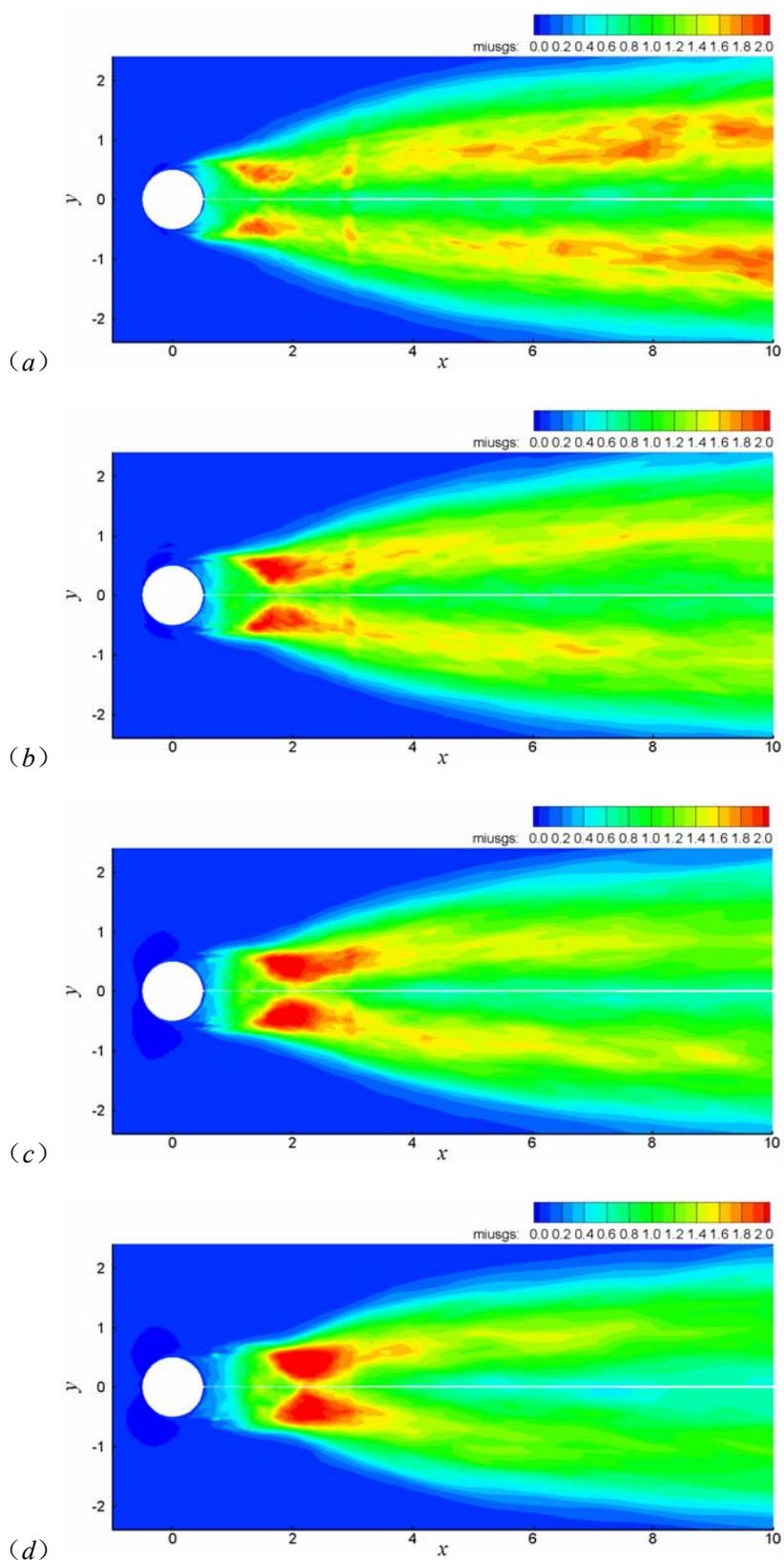
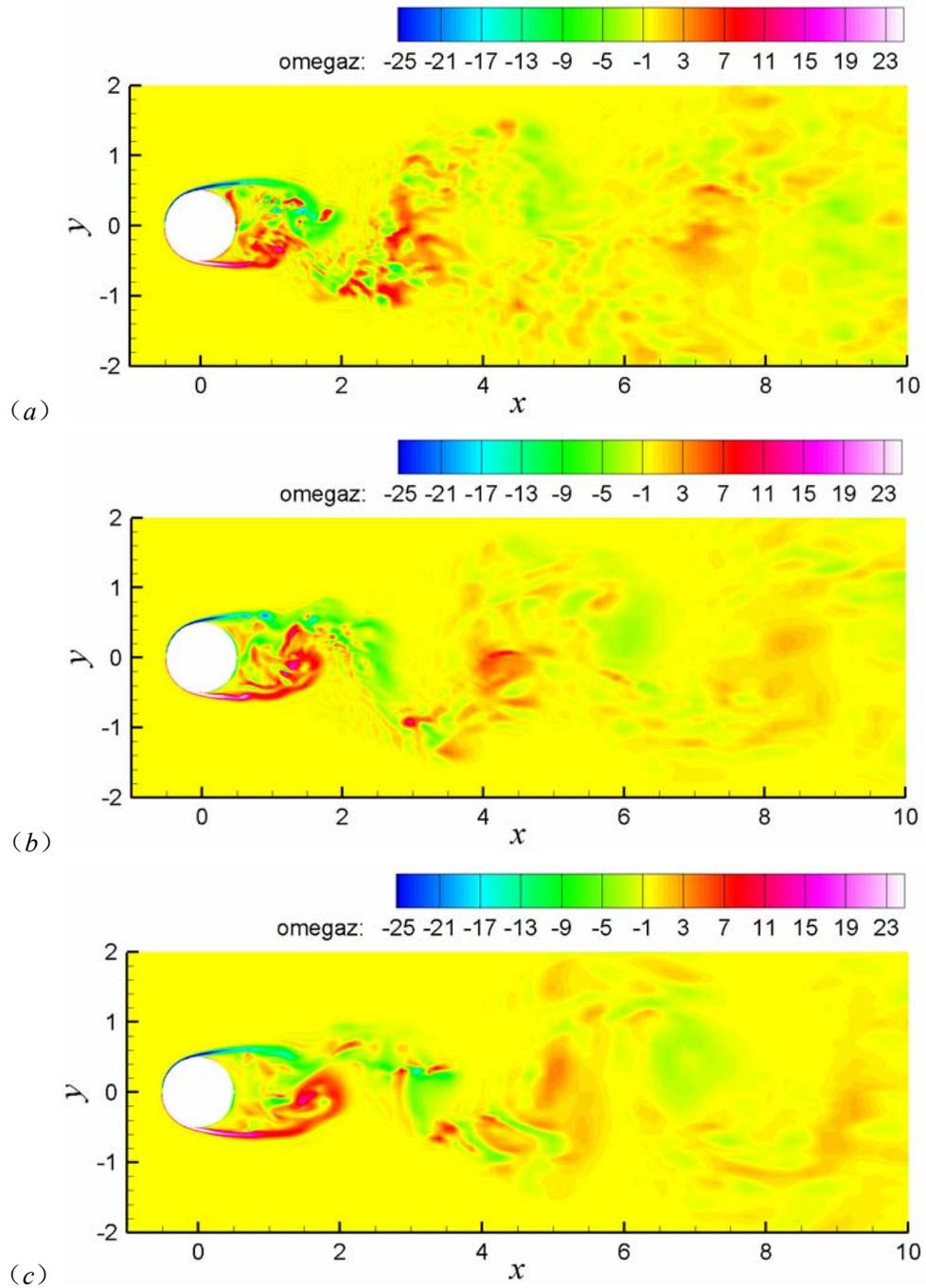


图 54 不同算例亚格子粘性系数同分子粘性系数比值 μ_{sgs}/μ 的平均值云图 (a) C1; (b) C2; (c) C3; (d) C4

4.2.3 瞬态流场分析

图 55 所示为 5 个算例展向某截面瞬态涡量 ω_z 的云图，从图中可以看出，瞬态涡量场中存在从圆柱表面分离形成的自由剪切层，由于无粘不稳定性，剪切层在小扰动作用下失稳，产生准二维的展向涡，计算中的人工粘性越大，涡层失稳越是靠后，对应更大的平均回流区长度。而“U”型和“V”型流向平均速度剖面的出现，也和剪切层的失稳有关：人工粘性小，数值扰动很少受到抑制，自由剪切层更快的失稳，外流和回流区的掺混更加剧烈，由此出现“V”型速度剖面，反之则形成“U”型剖面。



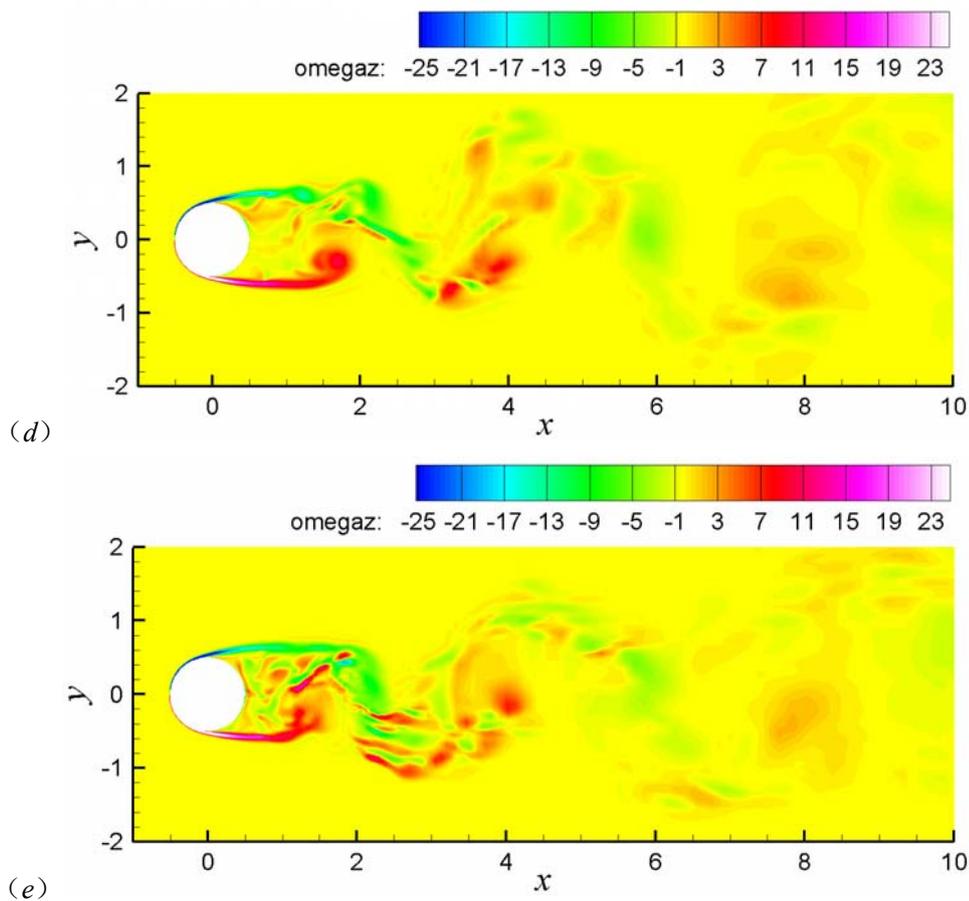
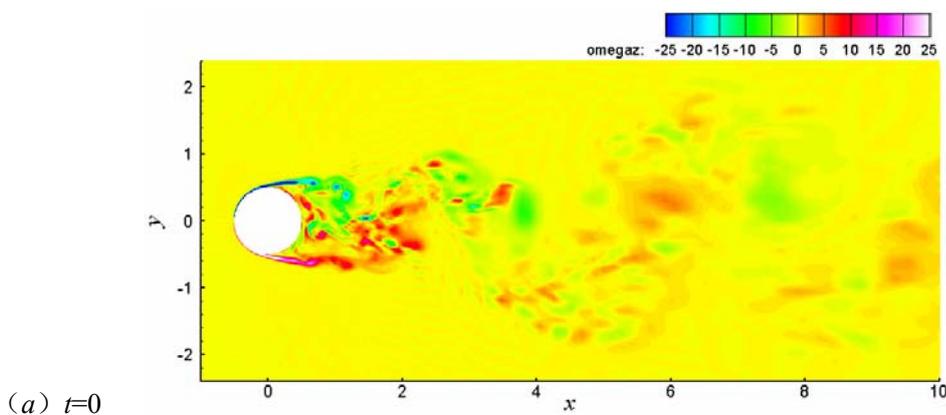
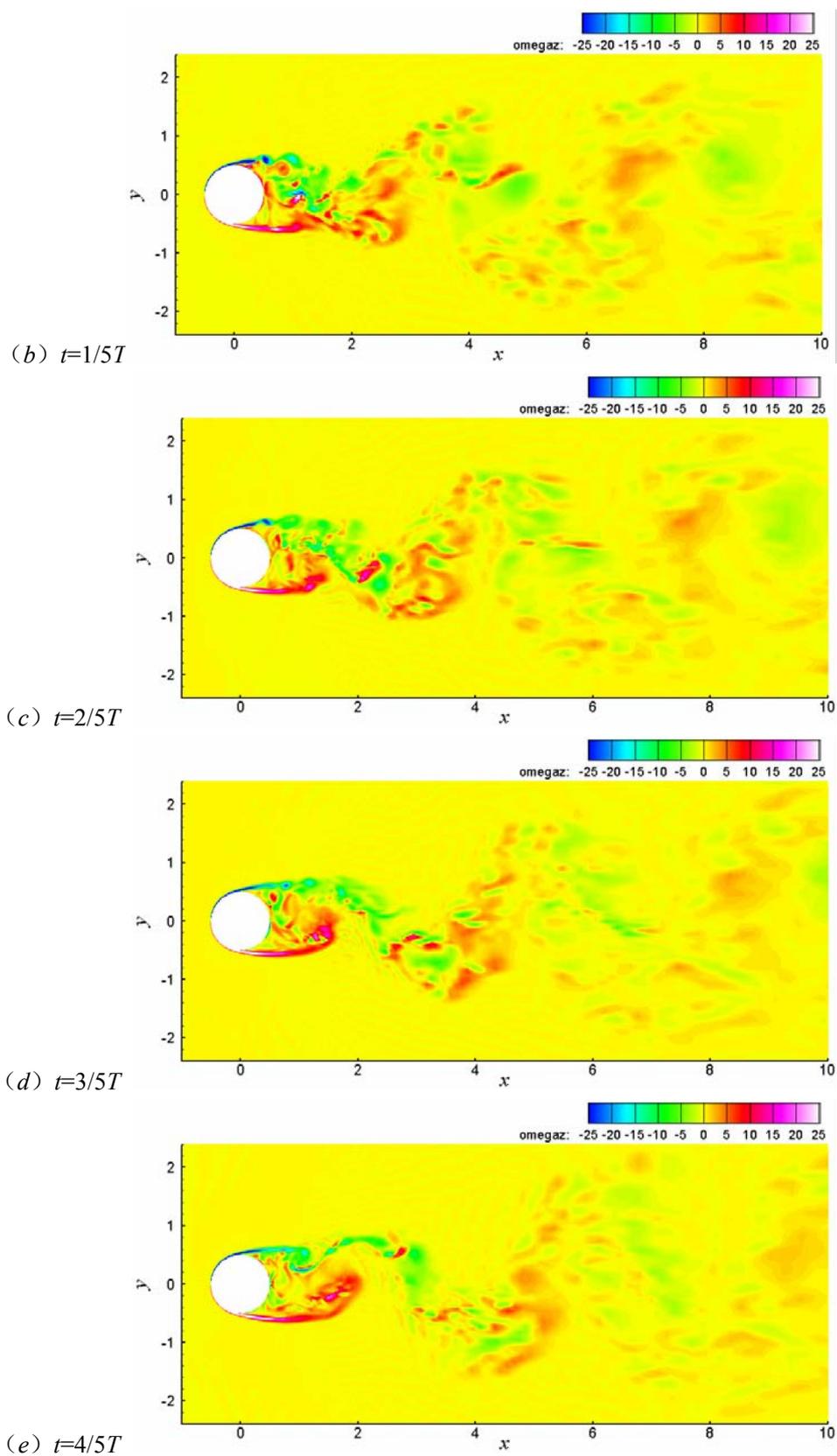
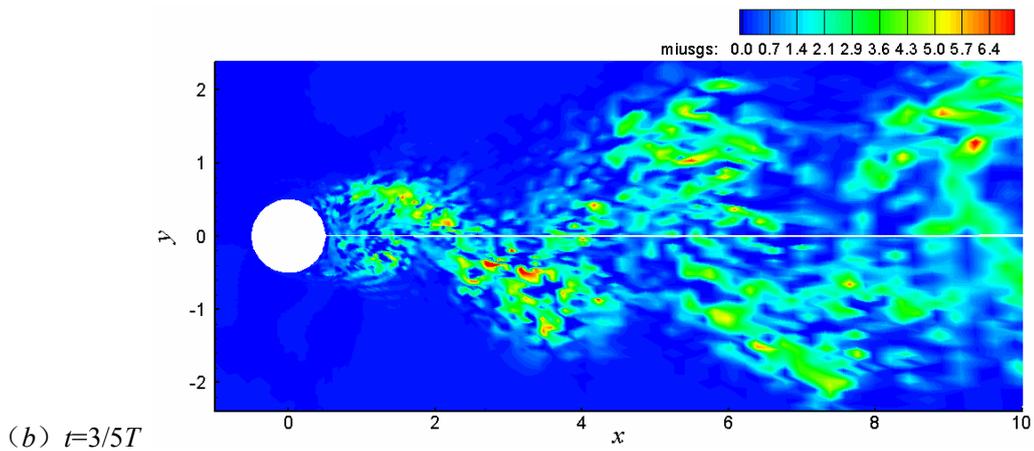
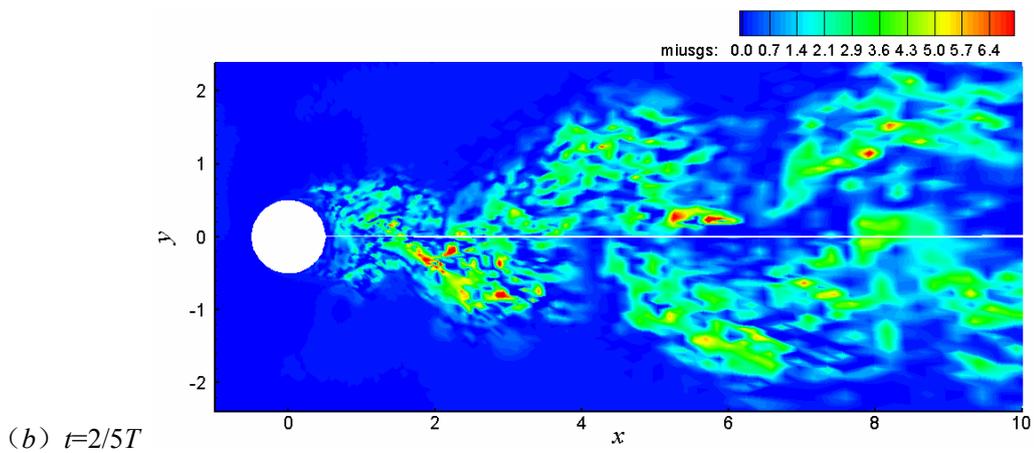
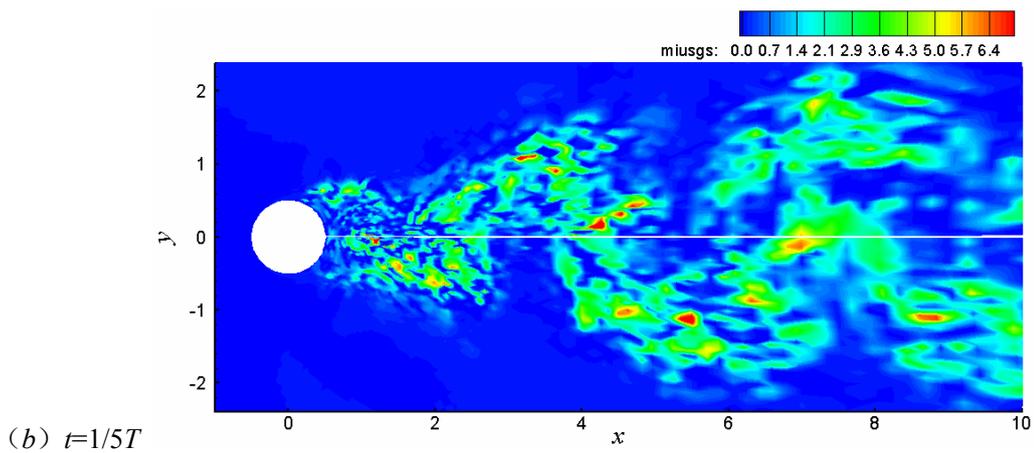
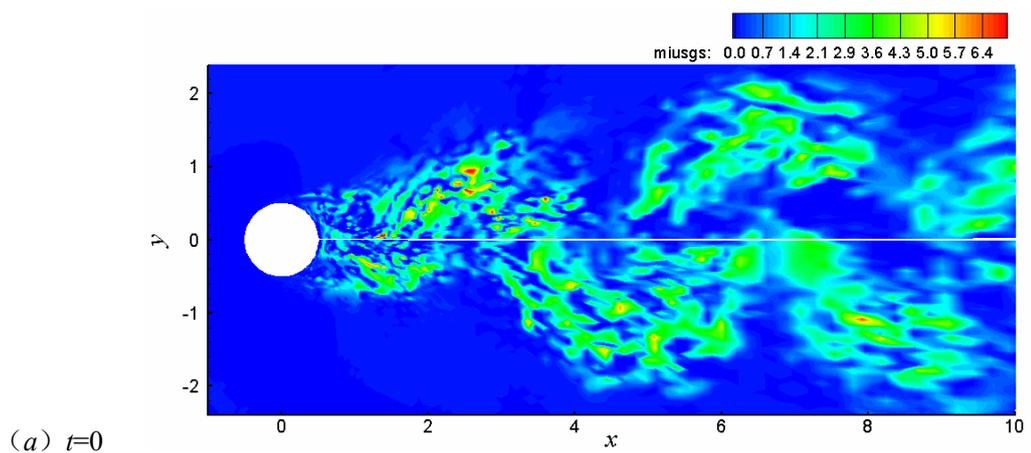


图 55 5 个算例展向某截面瞬态涡量 ω_z 的云图：(a) C1；(b) C2；(c) C3；(d) C4；(e) C4nosgs

图 56 给出了算例C2 展向某截面涡量 ω_z 一个周期的时间序列，从中容易看出圆柱上下的旋涡是如何交替脱落的；图 57 则是与图 56 对应截面粘性系数比值 μ_{sgs}/μ 的时间序列。对比两幅图画可以发现：瞬态粘性系数比值较大的区域与展向涡量较大的区域总是对应的，由此在 μ_{sgs}/μ 的云图中也出现了类似卡门涡街的结构，这从一个侧面反映了本文的计算结果的可靠性。



图 56 算例 C2 展向某截面涡量 ω_z 一个周期的时间序列



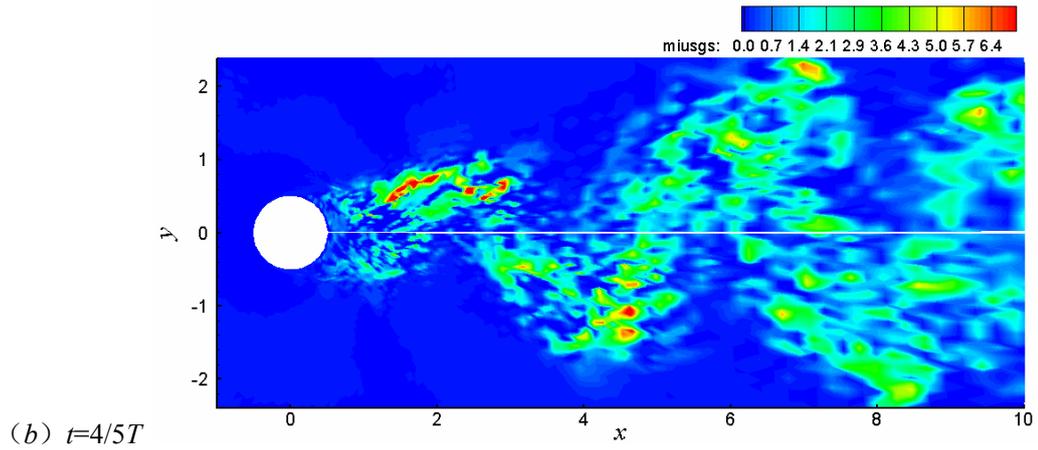


图 57 与图 56 对应截面粘性系数比值 μ_{sgs}/μ 的时间序列

4.3 小结

本章采用槽道湍流和亚临界的圆柱绕流作为考核算例，通过改变参数设置，如修改亚格子模型系数取值范围、人工粘性系数等，对 MPLES 进行了广泛而细致的测试，总结了各类参数变化对计算结果的影响，这为后面章节的数值模拟工作打下了坚实的基础。已有的研究和本章的数值实验都表明，对于亚格子应力张量的各向同性分量 τ_{kk} ，过大的取值会使得计算不稳定，出现数值振荡甚至导致计算发散，而直接略去该项不会对计算结果的准确性产生可分辨的影响，因此，计算中将 τ_{kk} 对应的亚格子系数 C_l 直接设为 0 而不再使用动力模型计算。对于另外两个亚格子系数 C 和 Pr_{sgs} ，为了保证计算的稳定性，通常设置了二者的取值范围，计算实践表明， C 的范围取 $[0, 0.04]$ ， Pr_{sgs} 的范围取 $[0.3, 1.0]$ 是合理的。人工粘性系数的取值会对计算结果产生巨大的影响，它也会在一定程度上影响亚格子模型作用的发挥甚至完全“淹没”亚格子模型，到目前为止，还缺乏可靠的手段评估人工粘性的效应，也无法针对一般流动提前给出“最优”的系数取值，因此，大涡模拟中人工粘性的使用很大程度上仍然依赖于经验和数值实验。

第五章 定常来流下的低压涡轮叶栅流动

在完成程序的校验以后,本章及下一章的主要内容即是对低雷诺数低压涡轮叶栅流动的模拟和分析,为了深入认识非定常扰动环境下涡轮叶片边界层的流动机理,结合对照实验,这里一共进行了四种不同入口边界条件的计算,即(1)定常来流,(2)有背景湍流度的定常来流,(3)周期性尾迹来流,(4)有背景湍流度的周期性尾迹来流。本章首先对这些计算工作进行总体说明,内容包括对照实验介绍、算例说明、定解条件等,接下来重点分析了定常来流条件下(定常来流,有背景湍流度的定常来流)的计算结果。而有关周期性尾迹作用下的叶栅流动(周期性尾迹来流,有背景湍流度的周期性尾迹来流)则放在下一章进行分析。

5.1 对照实验介绍

本章及下一章数值模拟工作所选用的叶栅是名为T106D-EIZ的低压涡轮平面叶栅,该叶栅在德国慕尼黑联邦军事大学(Universität der Bundeswehr München)的高速叶栅风洞中进行了实验,并公布了相关的实验数据^[342],参见文献[342][343]。T106D-EIZ叶栅的叶型取自PW2037发动机低压涡轮转子叶片的叶中截面,属于后加载叶型。实验条件下,由5个叶片组成的叶栅如图58所示^[342],叶片弦长 $l=100\text{mm}$,进口气流角 $\beta_1=127.7^\circ$,出口气流角 $\beta_2=26.8^\circ$,叶栅展弦比 $h/l=1.76$ 。为了使吸力面的分离区更为明显,便于观察和测量边界层的发展细节,实验中将叶栅的节弦比 t/l (栅距与弦长之比)由原来的0.799增加到1.05,而叶型几何参数保持不变,由此增大了约30%的叶片负荷,定常条件下在吸力面60%轴向弦长位置附近出现较大的分离区。距叶片前缘 $0.7l$ 处放置等距分布的细圆柱,圆柱直径 $d_b=2\text{mm}$,圆柱排栅距 $t_b=40\text{mm}$,通过上游圆柱的运动实现对来流尾迹的模拟。实验的入口测量平面位于叶片前缘 $0.3l$ 处,出口测量平面则位于叶片尾缘后 $0.4l$ 位置。

实验中使用的测试手段和获得的测试数据都非常丰富^[342]:入口测量平面,采用三维热线探针对来流速度、湍流度和进口气流角进行了测量;出口测量平面,定常来流时采用五孔针测量总压损失系数和出口气流角,尾迹来流时则使用由皮托管和高频响传感

[注] 按照文献[342]的要求,引用实验数据的来源如下:

The measurements on the T106D-EIZ turbine cascade were carried out at the Institut für Strahltriebwerke der Universität der Bundeswehr München (Germany). The experimental investigations were performed and funded as part of the joint research program "Periodisch Instationäre Strömungen in Turbomaschinen" of the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG).

器组成的尾迹靶进行测量。与中心叶片相邻两个叶片的吸力面和压力面分别布置了静压孔，中心叶片的吸力面则采用动态压力传感器测量压力。此外，中心叶片吸力面表面还覆盖了热膜，用于分析边界层的发展；而沿着中心叶片的 6 个轴向位置，则采用一维热线探针详细测量了吸力面边界层的特性。

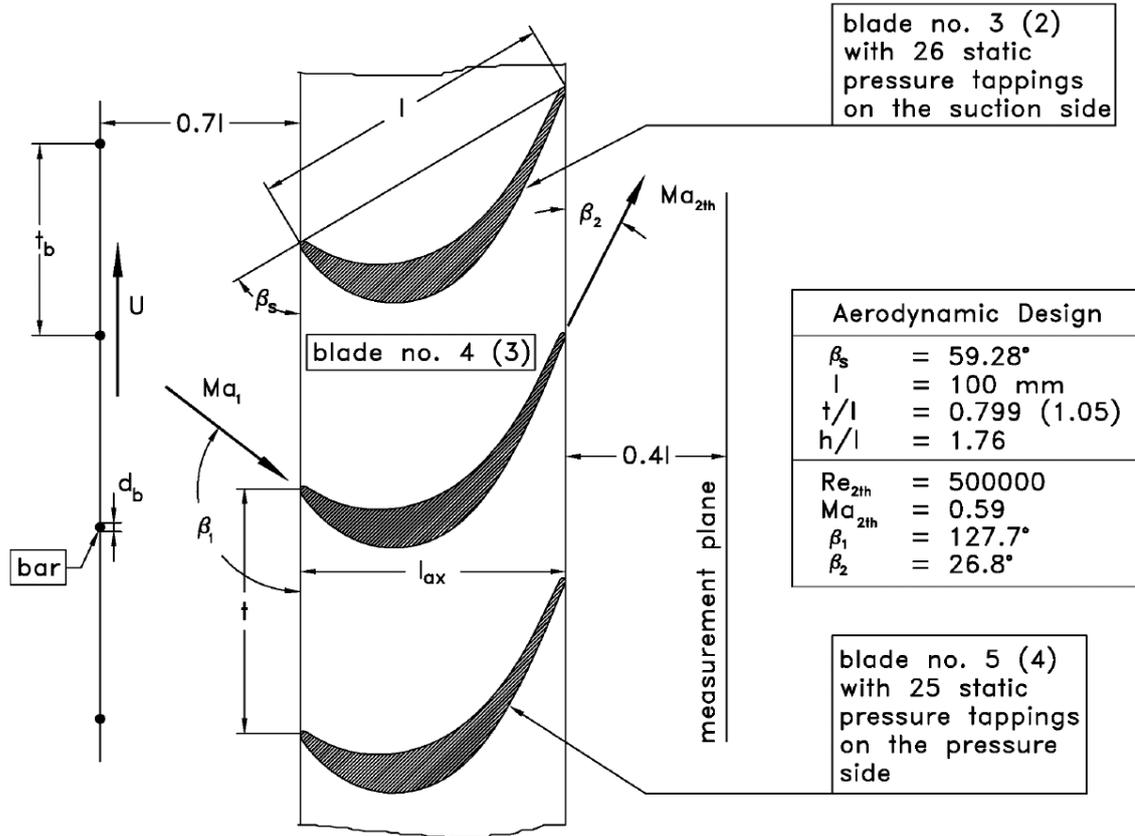


图 58 T106D-EIZ叶栅实验示意图^[342]

整个实验包含三个测量点的数据，具体细节可见表 12^[342]，其中测量点 1 (R2M4) 为参考点，出口雷诺数 $Re_{th} = 200139$ ，出口马赫数 $Ma_{th} = 0.401$ ；测量点 2 (R2M5) 相对点 1 提高了马赫数， $Ma_{th} = 0.593$ ，雷诺数则基本保持不变；测量点 3 (R6M4) 相对点 1 减小了雷诺数， $Re_{th} = 60154$ ，而马赫数基本不变。这里的 Re_{th} 和 Ma_{th} 是按照入口到出口的等熵膨胀过程定义的，其计算公式如下：

$$Ma = \sqrt{2/(\gamma-1) \left[(p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]} \quad (5.1)$$

$$Re = \frac{p_2 \cdot Ma \cdot l}{\mu_0} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{T_0^{1.5} (T + T_S)}{T^2 (T_0 + T_S)} \quad (5.2)$$

T 为等熵膨胀得到的出口静温，其公式为：

$$T = T_{t1} / (1 + (\gamma-1)Ma^2/2) \quad (5.3)$$

上面的公式中， p_{t1} 和 T_{t1} 分别为入口总压和总温， p_2 为出口静压， $\gamma=1.4$ ， $R=287.06\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ， $T_s=110.4\text{K}$ ， $T_0=273.16\text{K}$ ， $\mu_0=1.711\times 10^{-5}\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ 。

从表 12 中还可以看出，三个测量点的入口总温基本保持一致；上游圆柱的运动速度 U_b 则均为 21.4m/s ，也就是说，三种情况下的尾迹通过频率是相同的；此外，来流的背景湍流度也基本上都等于 2.5%。

由于本文数值模拟工作的主要目标是研究低雷诺数条件下的低压涡轮叶栅流动，在上述三个测量点中，点 3 (R6M4) 的雷诺数 $\text{Re}_{th}=60154$ ，马赫数 $\text{Ma}_{th}=0.402$ ，显然最符合要求，于是这里将测量点 3 选作对照实验点，本章及下一章的所有计算工作都是针对该点进行的。

表 12 三个测量点的参数列表^[342]

	Point 1 – R2M4	Point 2 – R2M5	Point 3 – R6M4
Exit Reynolds number Re_{2th}	200.139	198.921	60.154
Exit Mach number Ma_{2th}	0.401	0.593	0.402
Geometric inlet flow angle β_1 [°]	127.7	127.7	127.7
Total pressure in the inlet plane p_{t1} [hPa]	258.2	188.6	77.7
Static pressure in the inlet plane p_1 [hPa]	242.5	166.3	72.7
Static pressure in the exit plane p_2 [hPa]	232.6	148.7	69.5
Total temperature T_t [°C]	40.0	40.0	40.1
Bar spacing t_b [mm]	40	40	40
Bar speed U_b [m/s]	21.4	21.4	21.4
Strouhal number Sr_{2th}^2	0.38	0.26	0.38
Background turbulence level Tu_1 [%]	$\approx 2.5\%$	$\approx 2.5\%$	$\approx 2.5\%$

5.2 算例说明

选定测量点 3 (R6M4) 作为对照实验点后，需要根据该点的具体实验情况确定数值模拟工况，点 3 的测量包含定常来流和非定常尾迹来流两种条件，测量过程中入口总温、总压、气流角，出口背压等保持不变，来流湍流度也基本固定。据此，作者选定了四种工况进行计算，如表 13 所示，四个算例分别命名为 C1~C4，其中 C1 和 C2 模拟定常来流条件，二者的差别在于，C2 考虑了来流背景湍流度的影响；C3 和 C4 模拟非定常尾迹条件，其差别也在于，C4 考虑了背景湍流度的效应。对四个算例而言，除计算域入口由于存在尾迹和/或湍流度造成的差异外，其他的计算条件基本保持一致：入口总温、总压、气流角和出口背压都按照点 3 的测量结果给定。对比实验和 4 个算例容易看出，C2 和 C4 由于考虑了背景湍流度，理论上它们与实验中的两种工况更为接近。

表 13 涡轮叶栅流动算例说明

算例	代 称	说 明
C1	steady	定常来流
C2	FST+steady	有背景湍流度的定常来流
C3	wakes	周期性尾迹来流
C4	FST+wakes	有背景湍流度的周期性尾迹来流

实际上,在完成前述的实验测量后,同一研究组也采用雷诺平均方法对测量点 1 和 3 进行了数值模拟^[344], Cardamone 等的计算使用了含 AGS 转捩模型的 S-A 模型,非定常来流的计算域包含上游圆柱排,计算和实验结果的对比表明:对于高雷诺数条件的测量点 1,无论定常/非定常来流,数值模拟结果均和实验结果吻合的较好;而对于低雷诺数的测量点 3,定常来流结果符合较好,非定常来流则和实验完全不同,其原因可能是由于计算中尾迹耗散过快,对下游叶片边界层的发展几乎没有产生影响。这也从一个侧面说明,对于低雷诺数的测量点 3,雷诺平均方法存在较大缺陷,准确模拟该点流动需要更高精度的数值方法。

图 59 给出了涡轮叶栅计算域的示意图,如图所示, x 、 y 、 z 分别代表叶栅的轴向、周向和展向,以叶片的轴向弦长 l_{ax} 作为特征长度,计算域入口距叶片前缘 $0.5l_{ax}$,出口距叶片尾缘 $2l_{ax}$;由图 58 已经知道,叶片安装角 $\beta_s = 59.3^\circ$,叶栅节弦比 $t/l = 1.05$,于是栅距 $t = 1.05l = 1.05l_{ax}/\sin\beta_s \approx 1.22114l_{ax}$;而叶栅的展向宽度取为 $0.2l_{ax}$ 。由此可知,无量纲化以后计算域沿 x 、 y 、 z 方向的尺寸分别为 3.5、1.22114 和 0.2,关于计算域尺寸的确定,主要从以下三个方面考虑:

首先,计算域只针对单独的涡轮叶栅通道而没有包括上游的圆柱排,理论上,对于非定常来流条件的计算,包含圆柱排的模拟更接近实验,因而也更有可能获得准确的结果。但是,如果包含圆柱排,一方面,为了准确分辨圆柱产生的尾迹并尽量减小尾迹传播中的数值耗散,绕圆柱排的网格必须足够密,这会大大增加计算量(粗略估计可能翻番),以作者目前能获得的计算资源还难以承受;另一方面,由于圆柱排和下游叶栅的相对运动,二者的网格之间存在一滑移界面,计算中需要沿界面进行数据传递,由于目前还缺少高精度且保证通量守恒的插值算法,上游尾迹通过界面时引入的误差可能“扭曲”真实的尾迹,影响最后的计算结果;此外,目前已有的采用 LES/DNS 研究尾迹与叶栅相互作用的数值模拟工作中,绝大部分的计算域均不包含上游圆柱^{[50][52][53][55]},这表明,至少对于不可压流动,已有较为成熟的人工生成计算域入口尾迹的方法,对于可压流,虽然其难度更大,但也可以发展类似的方法。

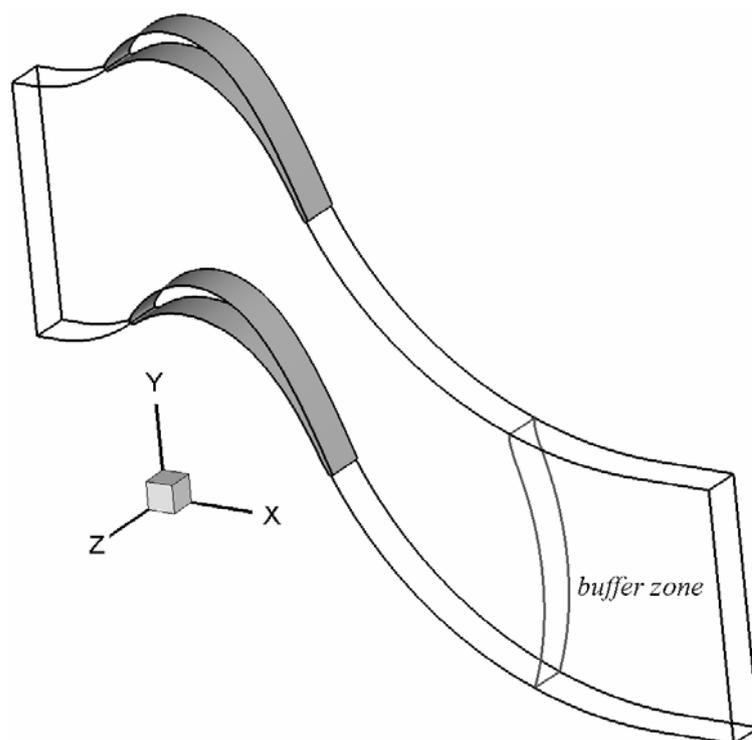


图 59 涡轮叶栅计算域示意图

其次，在实验中，叶栅的节弦比 t/l 从 0.799 增加到 1.05 以后，栅距 $t = 105\text{mm}$ ，而上游圆柱排的栅距 t_b 仍保持 40mm ，栅距 t 不再是 t_b 的整数倍，为减小计算量，文献 [344] 将 t_b 从 40mm 改为 35mm ，圆柱的运动速度 U_b 仍保持 21.4m/s ，这样，计算中只需处理一个叶栅通道，唯一的问题在于尾迹通过频率稍有增加，[344]文的研究表明，这种改变对计算结果影响不大。本文的计算也采用了类似的处理方法，将上游相邻尾迹的距离改为 35mm ，尾迹运动速度不变，当然，通过频率的增加可能会增强尾迹对下游叶片吸力面分离区的抑制。

第三，在确定计算域入口位置时，一方面，为减小下游叶片排位势场对入口边界可能产生的影响，入口位置应尽量靠前；另一方面，为在入口加入人工生成的尾迹，入口位置又必须位于圆柱排以后；此外，要利用入口测量平面给出的总温、总压、气流角等条件，入口位置又需要尽量靠近测量平面。综合权衡，考虑到圆柱排和入口测量平面分别距叶片前缘 $0.7l \approx 0.814l_{ax}$ 和 $0.3l \approx 0.3489l_{ax}$ ，将计算域入口放置在前缘 $0.5l_{ax}$ 处是比较合理的。对于计算域的出口位置，为了尽量减少出口边界数值反射对流场可能产生的影响，靠近出口边界设置了长度接近 l_{ax} 的缓冲区，叶片尾缘后的“有效”流场长度也接近 l_{ax} ，故出口位置设置在尾缘后 $2l_{ax}$ 处。关于计算域的展向宽度，本文取为 $0.2l_{ax}$ ，虽然理论上叶栅的展向尺度应尽可能的大一些，但为了避免过大的计算量，综合已有的研究工

作，并考虑本文计算叶栅的雷诺数，展向宽度取为 $0.2l_{ax}$ 是比较合理的。

图 60 是沿 $x-y$ 平面的二维计算网格（生成方法参见文献 [341]）^[注]，对于叶片的前缘和尾缘区域，图中还给出了放大的局部细节，计算域沿 x 、 y 、 z 三个方向的网格单元数目分别是 340、150、32，总的网格数为 163.2 万。沿着 x 方向，计算域入口段、叶片表面、出口段分别有 60、150、130 个网格，出口段的最后 20 个网格单元被设置成缓冲区；叶片前缘和尾缘附近，网格适当加密，计算域入口段由于要分辨来流尾迹，网格较为均匀，叶片中部的网格也是均匀分布，而在出口段，流向网格逐渐稀疏，这在缓冲区最为明显。对于 y 方向的网格，由于要分辨叶片表面特别是吸力面的边界层，大部分网格点均位于壁面附近，第一层网格的高度则根据经验及已有工作做了预估，保证其 y^+ 取值满足大涡模拟的要求。展向 z 作为统计均匀方向，32 个网格单元沿该方向均匀分布。总的来说，虽然这里采用了较为简单的 H 型网格，但总体的网格质量——无论是网格的扩张比还是与壁面的正交性，抑或网格单元的疏密分布——仍然很高，可以预期，该网格符合大涡模拟对计算网格的需求，有能力准确分辨涡轮叶栅真实物理环境中存在的流动现象。

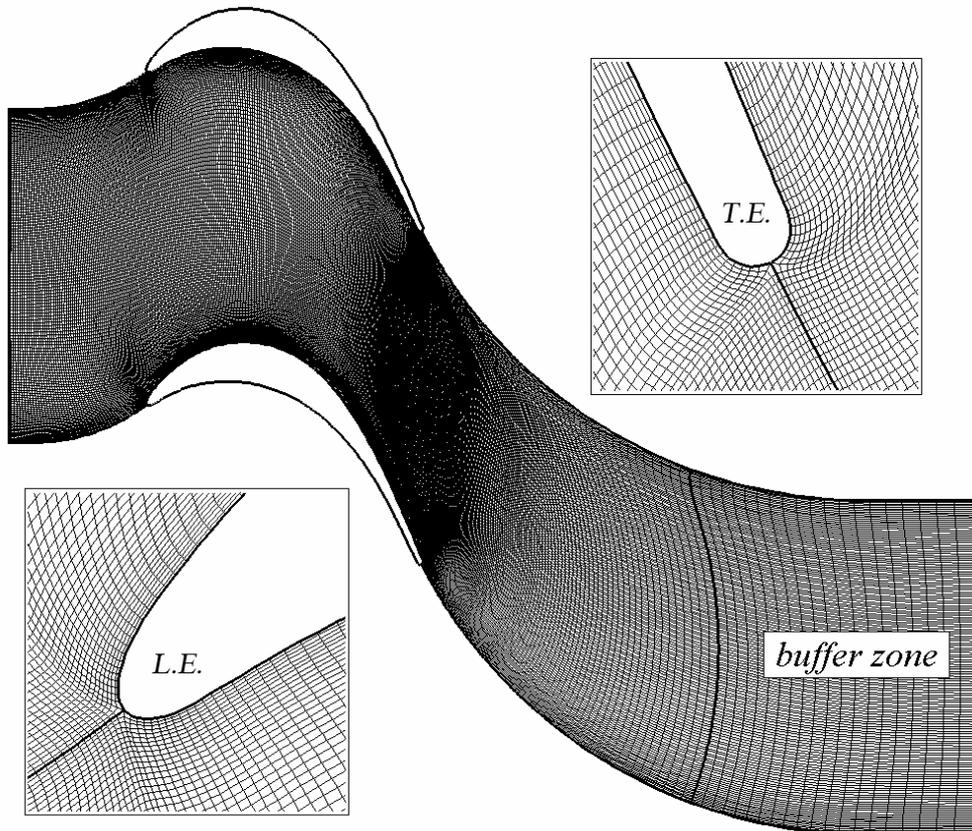


图 60 涡轮叶栅二维计算网格示意图（包含前尾缘局部细节）

[注] 程序编写参考了宁方飞老师提供的二维网格生成程序，在此向宁老师表示感谢

由于MPLES求解的是无量纲化的控制方程,对于实验中给定的有量纲参数,需要进行无量纲处理。按表12给定的条件,进口总温 $T_{t1} = (273.16+40.1)\text{K} = 313.26\text{K}$,总压 $p_{t1} = 7770\text{Pa}$,出口背压 $p_2 = 6950\text{Pa}$,利用公式(5.1)和(5.2),可以计算得到马赫数 $Ma = 0.402$,雷诺数 $Re_l = 60336.5$,这里的雷诺数取值和表12中的取值($Re_l = 60154$)稍有差异,其原因在于粘性系数计算公式的差别。由于计算中取叶片的轴向弦长 l_{ax} 作为特征长度,故实际的雷诺数 $Re = Re_l \sin \beta_s \approx 51881$ 。表12中给定的叶栅几何进口气流角 $\beta_1 = 127.7^\circ$,文献[342]建议,计算中使用的真实进口气流角应取 $\beta_1 = 131.7^\circ \sim 133.7^\circ$,即 $\Delta\beta_1 = +4 \sim 6^\circ$,文献[344]对测量点3的模拟中,取 $\beta_1 = 131^\circ$,于是这里也将进口气流角取为 131° 。综上所述,本文四个算例的计算参数设置如下:雷诺数 $Re = 51881$,马赫数 $Ma = 0.402$,无量纲的进口总温总压分别为 $T_{t1} = 1.03232$ 、 $p_{t1} = 4.94050$,进口气流角 $\beta_1 = 131^\circ$,无量纲的出口背压 $p_2 = 4.41911$,参考温度取 $T = 303.45\text{K}$;此外,对于算例C3、C4,无量纲的圆柱运动速度(即尾迹运动速度) $U_b = 0.152438$ 。

5.3 定解条件

对于C1~C4这四个算例而言,除入口边界条件外,其他边条的设置完全一致:出口边界给定背压(并设置缓冲区),进口段和出口段的周向为周期性边界,涡轮叶片的表面为无滑移的绝热固壁,计算域展向也是周期性边界。下面将对进口边条、出口边条和初场设置的某些细节进行说明。

5.3.1 进口边界条件

在对照实验中,入口测量平面给出的测量数据包括总温、总压和气流角等,为了与实验结果对比,算例C1~C4的进口边条设置也应该与此保持一致。对于定常来流的算例C1,不存在任何疑问,利用实验测得的总温、总压、气流角,按照3.4.1.3给出的方法执行即可;但是对于剩余的算例C2~C4,如何既满足实验测得的总参数,又能正确模拟背景湍流度和/或周期性尾迹的效应,是必须首先解决的问题。

事实上,不可压低压涡轮叶栅的LES或DNS中,计算域入口加入背景湍流度或周期性尾迹相对简单,目前也已经存在大量相关的研究工作^{[50][51][52][53][54][55]};但是对于可压缩的叶栅流动,有关背景湍流度效应的研究极少^[150],而关于周期性尾迹效应的工作——在作者了解的范围内——则完全没有。Xiong最先采用大涡模拟研究了自由流湍流对涡轮叶片滞止点流动和传热的影响,其进口边条设置如下^[248]:

$$\begin{aligned} s &= s_\infty, \quad w = w', \quad v_t = \bar{v}_t + v_t' \\ R_1 &= \bar{R}_1 + R_1', \quad R_2 = R_{2\text{int}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

即在计算域入口给定熵、展向速度分量、切向速度分量、向下游传播的Riemann不变量，另外从计算域内部外插向上游传播的Riemann不变量，式中带“ $\bar{\quad}$ ”的项代表定常的基本流（steady base flow），需要提前计算，带“ $'$ ”的项则代表自由流湍流的扰动项，从单独计算的自由衰减均匀各向同性湍流场（free decaying homogeneous isotropic turbulence）插值得到。Matsuura和Kato研究了有/无来流湍流度条件下的低压涡轮叶栅流动^[150]，进口没有湍流度时，给定总温、总压和气流角；有湍流度时，给定向下游传播的Riemann不变量、总压、切向和展向的速度分量，外插向上游传播的Riemann不变量，此时的入口边条可以写为：

$$\begin{aligned} w_\perp + \frac{2c}{\gamma-1} &= (w_{\perp,\infty} + w''_{\perp,1}) + \frac{2c_\infty}{\gamma-1} \\ w_\perp - \frac{2c}{\gamma-1} &= w_{\perp,B} - \frac{2c_B}{\gamma-1}, \quad w_\parallel = w''_{\parallel,1}, \quad u_3 = u''_{3,1} \\ p &= P_{t,\infty} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{w_\perp^2 + w_\parallel^2 + u_3^2}{c^2} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

式中的 $w''_{\perp,1}$ 、 $w''_{\parallel,1}$ 和 $u''_{3,1}$ 代表速度扰动，同样从单独计算的自由衰减各向同性湍流场插值得到。

对于本文的算例，计算域入口既可能要加入背景湍流度，又可能要加入周期性尾迹，Xiong的进口边条设置一方面需要计算基本流、另外又不一定满足实验给定的总参数，因而并不适用；Matsuura和Kato的进口边条保证了总压，但指定向下游传播的Riemann不变量并不十分合理，因此也不是非常理想。针对这种情况，作者采取了下述的边条设置方案：对于算例C1~C4，均利用实验测得的总温、总压和气流角，按照3.4.1.3给出的方法计算进口边界条件，当计算域入口存在背景湍流度/周期性尾迹时，单独计算自由衰减的均匀各向同性湍流/时间演化的尾迹流（time-evolving wakes），从中提取出扰动流场，叠加到计算域入口，以此来模拟背景湍流度/周期性尾迹的效应。

在进行算例C2~C4的模拟前，需要提前计算均匀各向同性的湍流场和时间演化的尾迹流场，由附录B的分析可知，要完全确定它们的计算条件，就必须提前给定涡轮叶栅入口平面的流动参数，但实际上，在完成叶栅流动的模拟前，这些参数的准确值是未知的，因此只能根据实验测量获得的数据进行预估，利用表12中的数据，可以算出叶

栅入口平面上量纲的平均密度、温度和流速如下：

$$\begin{aligned}\rho_{in} &= 1.03253 \\ T_{in} &= 1.01289 \\ U_{in} &= 0.775405\end{aligned}\quad (5.6)$$

在后续的叶栅计算中，发现平均流速 U_{in} 的估值偏大，所以下述均匀各向同性湍流和时间演化尾迹流的模拟据此进行了适当的修正。

5.3.1.1 均匀各向同性湍流的模拟

对于自由衰减的均匀各向同性湍流，其计算域是一个边长 $L_1 = 2\pi$ 的立方体，各方向的网格单元数均取 32，以此保证和涡轮叶栅展向网格的匹配。计算域的三个方向都是周期性边界，在没有外力作用的条件下，计算域内流体的运动会因粘性的耗散而逐渐衰减。可压缩各向同性湍流的模拟中，如何生成初始流场是其面临的主要困难之一，文献[345]对此进行了总结，归纳出四种生成初场的方法，本文从中选择执行相对简单且获得广泛应用^{[346][248]}的第四种：速度场散度为 0 且满足预先给定的能谱，温度、密度和压力均为常数而不包含任何脉动。选定这种初场后，取初始的密度、温度及声速作为特征物理量，由此，初始流场的密度 $\rho_1 = 1$ 、温度 $T_1 = 1$ ；计算的马赫数 $Ma_1 = 1$ 。由附录 B.2 的分析可知，计算的雷诺数 Re_1 和参考温度 T_{r1}^* 不能任意选取，而必须根据各向同性湍流场和叶栅流场的变换关系确定，利用该节的公式(B.28)和(B.29)有：

$$T_{r1}^* = T_{r2}^* T_{in} \approx 307.36K \quad (5.7)$$

$$Re_1 = \rho_{in} T_{in} \frac{Ma_1}{Ma_2} \frac{l_z}{2\pi} \frac{(T_{r1}^* + T_s^*)}{(T_{r2}^* + T_s^*)} Re_2 \approx 4227 \quad (5.8)$$

这样，除初始速度场外，其他所有的计算参数都已经被确定下来；而对于初始速度场，如前所述，则需要满足预先给定的能谱且散度为 0。通常，假设初始的三维能谱具有如下形式^{[345][346][248]}：

$$E(k) = Ak^4 \exp(-2k^2/k_0^2) \quad (5.9)$$

其中 A 是常数，它的大小决定了初始流场动能的大小； k 是谱空间的波数， k_0 则是能谱的峰值波数。 k_0 值决定了流场初始积分长度尺度 L_I 的大小，除湍流度外，积分尺度也是描述自由流湍流特性的一个重要参数，但在叶栅实验中并未对此进行测量，因此这里没有过多考虑不同积分尺度可能对流场产生的影响，计算中取 $k_0 = 4$ ，按文献[345]的公式，初始积分长度计算如下：

$$L_t = \sqrt{2\pi}/k_0 \quad (5.10)$$

容易知道, $L_t/L_1 = 1/(k_0\sqrt{2\pi}) \approx 0.1$, 也就是说, 当 $k_0 = 4$ 时, 初始流场的积分尺度近似为计算域边长的 1/10。接下来考虑常数 A 的取值, 首先定义湍流马赫数 (turbulent Mach number) Ma_t 如下^[345]:

$$Ma_t = \langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle^{1/2} / \langle c \rangle \quad (5.11)$$

这里的 $\langle \cdot \rangle$ 代表计算域的空间平均, 由上式变形, 可以得到:

$$\langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle = Ma_t^2 \langle c \rangle^2 \quad (5.12)$$

$\langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle$ 就是流场的均方速度脉动, 由附录 B.2 的分析可知, 给定叶栅入口湍流度后, 可以利用式(B.35)计算对应的各向同性湍流场的均方速度脉动:

$$\langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle = \frac{3}{T_{in}} \left(\frac{Tu U_{in} Ma_2}{Ma_1} \right)^2 \quad (5.13)$$

实验中测得的叶栅入口湍流度 $Tu = 2.5\%$, 由于这里的来流平均速度 U_{in} 估计偏大, 于是取 $Tu = 2\%$ 进行计算, 对应的均方速度脉动 $\langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle \approx 1.15114 \times 10^{-4}$, 因为计算中流场不断衰减, 显然, 其初始的取值应该更大, 利用式(5.12), 取 $Ma_t = 0.05$, 计算得到初始的 $\langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle = 0.0025$, 满足这一要求。

定义 K_0 为体积平均的湍动能, $K_0 = \langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle / 2$, 由文献 [345] 可知:

$$K_0 = \frac{3A}{64} \sqrt{2\pi} k_0^5 = \frac{\langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle}{2} \quad (5.14)$$

将(5.12)代入上式, 可以得到常数 A 的计算公式:

$$A = 32 Ma_t^2 \langle c \rangle^2 / (3\sqrt{2\pi} k_0^5) \quad (5.15)$$

能谱参数完全确定以后, 接下来就可以考虑无散速度初场的生成了^[注]。关于初始速度场的构造, Rogallo^[347]早在 1981 年便提出了一种简便的生成方法, 这里只列出最终的计算公式, 更多细节见参考文献 [347][308][179]。谱空间中一般速度向量的表达式可以写为:

$$\hat{u}_i(\mathbf{k})\mathbf{e}_i = \frac{\alpha(\mathbf{k})kk_2 + \beta(\mathbf{k})k_1k_3}{k\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\mathbf{e}_1 + \frac{\beta(\mathbf{k})k_2k_3 - \alpha(\mathbf{k})kk_1}{k\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\mathbf{e}_2 - \frac{\beta(\mathbf{k})\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{k}\mathbf{e}_3 \quad (5.16)$$

其中的随机系数 $\alpha(\mathbf{k})$ 和 $\beta(\mathbf{k})$ 由给定的能谱确定:

[注] 特别感谢张健博士在初始速度场生成方面提供的热情帮助

$$\alpha(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{E(k)}{2\pi k^2}} \exp(i\theta_1) \cos \phi, \quad \beta(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{E(k)}{2\pi k^2}} \exp(i\theta_2) \sin \phi \quad (5.17)$$

式中 θ_1 、 θ_2 和 ϕ 均是 $(0, 2\pi)$ 区间具有均匀概率密度分布的随机数。按照式 (5.16) 计算得到谱空间的速度向量后，利用三维快速 Fourier 变换 (fast Fourier transform, FFT)，将波数空间的速度向量转换为物理空间的速度向量，由此得到满足给定能谱的无散速度场。图 61 给出了按上述方法计算得到的均匀各向同性湍流初始速度场，其中图 (a) 是 x 方向速度分量的云图，图 (b) 则是预先给定三维能谱与实际计算得到能谱的对比图，容易看出，二者符合的很好，计算结果的峰值波数也位于预定的 $k_0 = 4$ 位置。

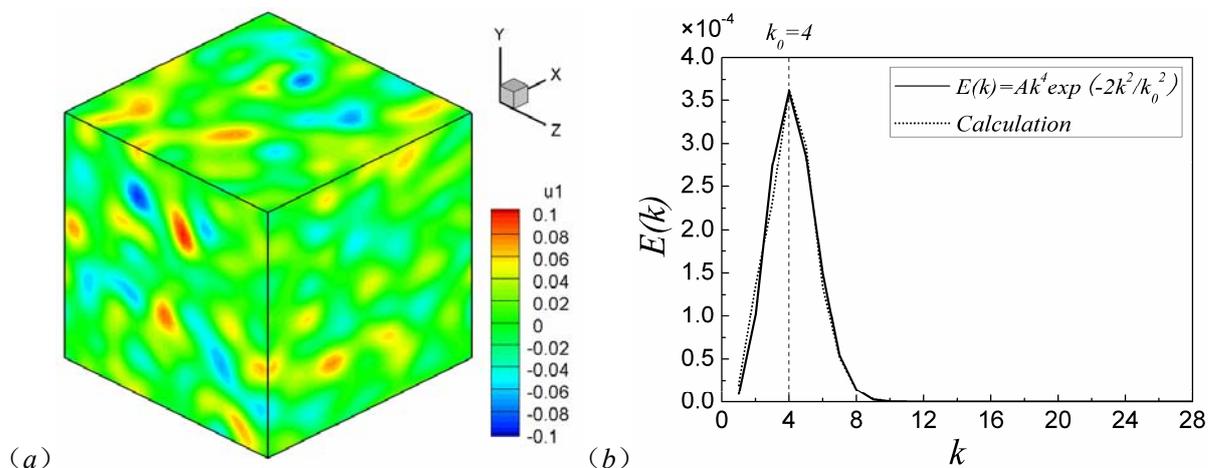


图 61 均匀各向同性湍流模拟的初始速度场及其三维能谱 (a) x 方向速度分量云图；(b) 预先给定能谱与流场实际能谱的比较

初场确定以后，采用 MPLES 对其进行计算，亚格子模型为动力涡粘模型，由于三个方向都是统计均匀方向，模型系数在整个计算域内进行了平均。计算的时间步长 Δt 取为 0.05，整个计算进行了 6000 步，每 20 步输出一个瞬态结果，即从 $t = 0$ 计算到 $t = 300$ ，一共得到 300 个流场文件。对这些文件进行处理，可以得到图 62 所示流场湍动能随时间衰减的曲线，图中纵坐标是归一化以后的湍动能， $K(t) = \langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle / 2$ ， $K_0 = K(t = 0)$ ；横坐标中的 t 是计算时间， τ 则是初场的大涡周转时间 (large-eddy turnover time)，对应本文使用的初始流场生成方法，其计算公式为^[345]：

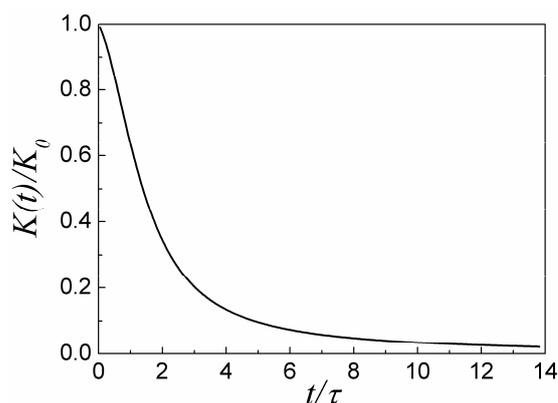


图 62 流场湍动能随时间的衰减

$$\tau = \sqrt{\frac{32}{A}} (2\pi)^{1/4} k_0^{-7/2} \quad (5.18)$$

已知 A 和 k_0 的数值，容易算出 $\tau \approx 21.708$ 。从图中可以看到，在初始大约 3τ 的时间内，湍动能衰减很快；而后其衰减速度逐渐减小；到大约 6τ 以后，衰减速度变得非常缓慢，这和文献 [345] 给出的曲线具有相似性。为了确定满足叶栅入口湍流度要求的瞬态流场，前文已经利用公式(5.13)算出该流场的均方速度脉动 ($\langle u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 \rangle$) 应该等于 1.15114×10^{-4} ，利用湍动能衰减曲线，容易知道 $t \approx 178$ 时刻的流场满足这一条件，于是将该时刻的流场作为最终需要的瞬态流场提取出来。图 63 给出了最终流场的图画及其能谱，其中图 (a) 是 x 方向速度分量的云图，与图 61 (a) 初始流场的云图相比较，由于湍能的衰减，速度分量取值的范围大大减小了；图 (b) 则是初始流场与最终流场能谱的对比，相比初始流场，最终流场的小尺度湍流已经填充到高波数区域，其峰值波数也从初场的 $k_0 = 4$ 变到 $k_0 = 2$ 位置，这些特点在对应的速度云图中均有所反映。

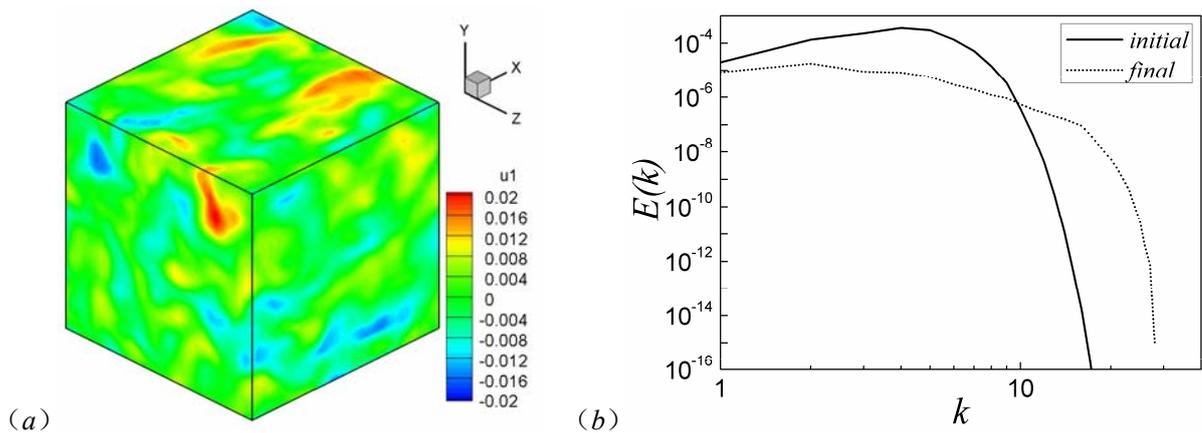


图 63 满足湍流度要求的最终流场及其三维能谱 (a) x 方向速度分量云图；(b) 初始流场与最终流场能谱的比较

5.3.1.2 时间演化尾迹流的模拟

相比各向同性湍流的模拟，时间演化尾迹流的计算过程更为复杂一些：为了生成尾迹流的初场，首先计算充分发展的槽道湍流，在流动达到统计定常状态以后，取出某一瞬态结果，将该流场从槽道中心平面“切开”，分成上下两个部分，再将上下两个半槽道反向拼接在一起（壁面重合），去掉中间的固壁，由此形成的流场即是尾迹流的初场；接下来计算随时间演化的尾迹流动，由于缺少外力作用，这一过程中尾迹不断衰减，速度亏损持续减小，尾迹宽度则逐渐增加。如果将特定时刻的瞬态流场变换到叶栅计算域后，所获得的尾迹特性与实验测量结果一致，那么该时刻的尾迹流场就是这里所期望得

到的最终流场。

对于槽道湍流的计算，按照附录 B.3 的分析，为了确定其他计算参数，槽道雷诺数 Re_1 必须提前给定，经过多次试算并考虑其他因素（如叶栅前面细圆柱的雷诺数、槽道计算维持湍流状态的最低雷诺数等等），最终将槽道雷诺数确定为 $Re_1 = 1200$ 。从附录 B.3 的分析还可以知道，除雷诺数 Re_1 ，槽道中心位置的时均密度 ρ_c 、温度 T_c 和流向速度 U_c 也必须预先给出，在已知雷诺数的条件下，它们的取值可以通过对“确定流动参数、槽道流计算、流场统计平均”这一过程的反复迭代得到，其最终取值如下：

$$\begin{aligned} \rho_c &= 0.999353 \\ T_c &= 1.01286 \\ U_c &= 1.19252 \end{aligned} \quad (5.19)$$

上述条件确定以后，槽道计算的参考温度 T_{r1}^* 由附录 B.3 节的式(B.39)确定：

$$T_{r1}^* = \frac{T_{in}}{T_c} T_{r2}^* \quad (5.20)$$

于是， $T_{r1}^* = 303.46\text{K}$ ；槽道马赫数 Ma_1 则由该节的式(B.41)计算：

$$Ma_1 = Ma_2 \frac{U_{rel}}{U_c} \sqrt{\frac{T_c}{T_{in}}} \quad (5.21)$$

其中 U_{rel} 是叶栅进口气流在尾迹参考系中的相对速度，假设 U_{in} 是其绝对流速， U_{bar} 为尾迹的周向运动速度，则相对速度 U_{rel} 的计算公式如下：

$$U_{rel} = U_{in} - U_{bar} \quad (5.22)$$

已知进口气流角 $\beta_1 = 131^\circ$ ， $U_{in} = 0.775405$ ， $U_{bar} = 0.152438$ ，容易算出， $U_{rel} = 0.882940$ ，相对尾迹参考系的进口气流角 $\beta_{wake} \approx 138.5^\circ$ ，代入式(5.21)，槽道马赫数 $Ma_1 = 0.297635$ 。槽道计算域的展向宽度 L_{z1} 则由式(B.46)确定：

$$L_1 = l_z \frac{Re_2}{Re_1} \frac{\rho_{in}}{\rho_c} \frac{U_{rel}}{U_c} \left(\frac{T_c}{T_{in}} \right)^{3/2} \frac{(T_{r1}^* + T_S^*)}{(T_{r2}^* + T_S^*)} \quad (5.23)$$

于是， $L_{z1} = 6.61449$ ，计算域的流向长度 L_{x1} 取为展向宽度的 4 倍。

综上所述，槽道湍流的计算条件如下：参考温度 $T_{r1}^* = 303.46\text{K}$ ，雷诺数 $Re_1 = 1200$ ，马赫数 $Ma_1 = 0.297635$ ，计算域沿流向、法向和展向的尺寸分别是 26.45798、2 和 6.61449，相应的网格单元数为 $64 \times 64 \times 32$ 。虽然实验研究表明^[32]，当雷诺数大于 900 时，槽道内流体便已处于完全湍流状态，但在作者的数值试验中发现，对于 $Re_1 = 1200$ 的计算，如果加入动力涡粘模型，则流场无法“转捩”到湍流状态，因此实际计算中不包含任何亚

格子模型，考虑到本算例雷诺数很低且网格较密，可以认为计算条件基本满足DNS的要求。除了亚格子模型导致的差异，本算例的计算过程与 4.1 节中的槽道算例完全一致：时间步长 $\Delta t = 0.003$ ，一共计算了 100,000 步，即从 $t = 0$ 到 $t = 300$ ；当 $t > 150$ 时，流动已处于统计定常状态，开始输出瞬态流场（每 100 步输出一个结果）。将输出的 500 个瞬态场进行统计平均，由此得到槽道中心位置的时均密度、温度和流向速度分别为：

$$\begin{aligned}\rho_c &= 0.999357 \\ T_c &= 1.01295 \\ U_c &= 1.19358\end{aligned}\quad (5.24)$$

和式(5.19)中给定的数值比较，二者差异很小，说明前面预设的 ρ_c 、 T_c 和 U_c 值是合理的。接下来，从上述 500 个瞬态流场中任意取出一个，用于尾迹流初场的生成（这里选取了 $t = 270$ 时的流场）。

选定槽道流场后，将该瞬态场从槽道中心平面“切开”，分成上下两个部分，再将上下两个半槽道反向拼接在一起（壁面重合），去掉中间的固壁，由此形成的流场即是尾迹流的初场。图 64 给出了时间演化尾迹流的计算域、计算网格及初场构成示意图，图 (a) 中的 x 、 y 、 z 分别代表流向、法向和展向，计算域的流向和展向尺寸与槽道一致，沿着这两个方向网格均匀分布，控制体数目也分别等于 64 和 32。法向坐标的原点位于计算域中心位置，在 $[-1,1]$ 区间，为了和槽道匹配，计算网格由两个半槽道的网格反向拼接而成，该区间内网格单元数为 64；由于计算过程中尾迹不断衰减，尾迹半宽持续增加，因此法向计算域从 $y = \pm 1$ 处向上下分别延伸了 6 个槽道半高，计算域边界位于 $y = \pm 7$ 位置，两个延伸区内分别有 50 个网格单元；以 $y = 0$ 为中心，法向网格沿上下方向逐渐稀疏。总的来说，计算域沿流向、法向和展向的尺寸分别是 26.45798、14 和 6.61449，相应的网格单元数为 $64 \times 164 \times 32$ 。

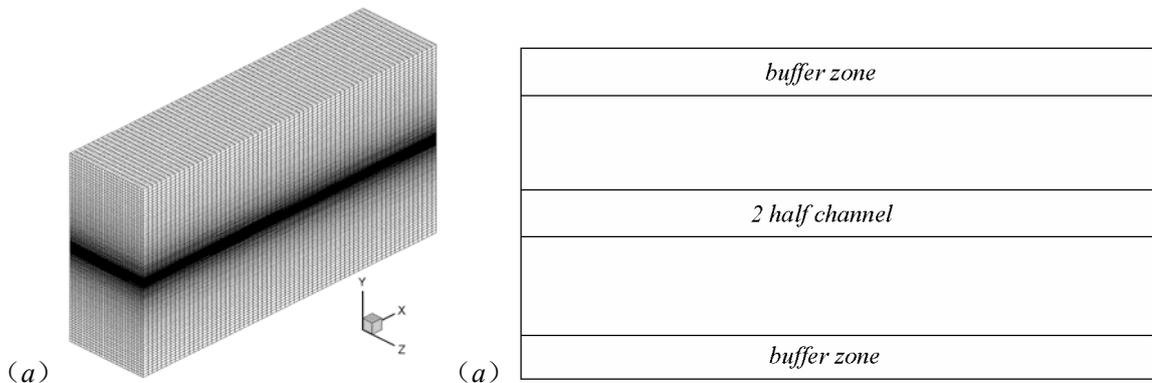


图 64 时间演化尾迹流的计算域、计算网格及初场构成 (a) 三维计算域及计算网格；(b) 初始流场的构成

计算域及计算网格确定以后,开始布置初始流场,其构成可参见图 64 (b):在法向的 $[-1,1]$ 区间,该区域的网格和两个半槽道的网格完全一致,可以直接将半槽道的瞬态流场放置到对应区域; $[-1,1]$ 以外的上下延伸段则可以看作是尾迹的势流区,流场均匀,相应的流动参数由式(5.19)给出,图 65 (a)即是按上述方案生成的初始流场。虽然从槽道流到尾迹流,计算域、计算网格均发生了变化,但其初始流场却来源于槽道计算的瞬态场,因此,在时间演化尾迹流的模拟中,其雷诺数、马赫数、参考温度的取值均与槽道流计算一致,分别为 Re_1 、 Ma_1 和 T_{r1}^* 。相应的边界条件设置如下:流向和展向为周期性边界,法向则使用特征边界条件,无穷远来流的参数也由式(5.19)给出,为了减小法向边界上可能存在的数值反射,靠近边界的 10 个网格单元被定义为缓冲区,如图 64 (b) 所示。

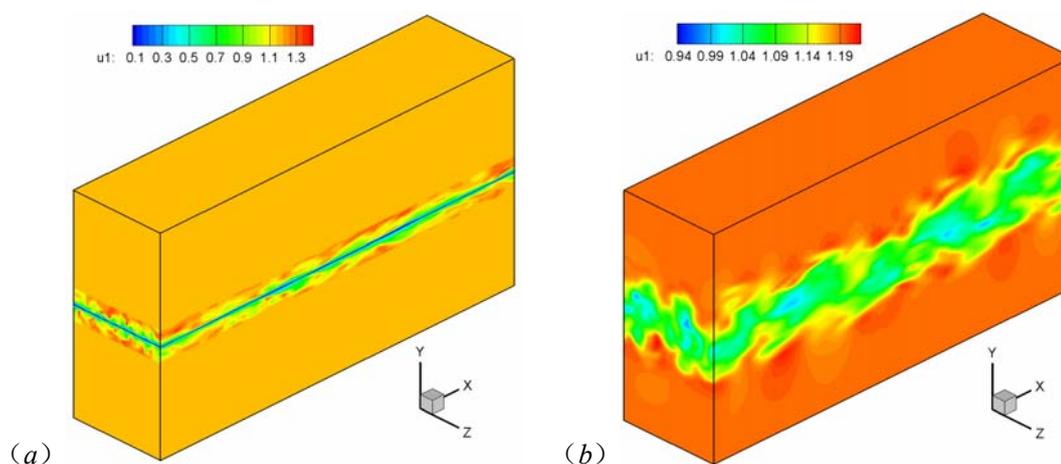


图 65 时间演化尾迹流的初始流场及最终流场 (a) 初始流场; (b) 满足尾迹特性要求的最终流场

完成初场的布置后,采用MPLES对时间演化的尾迹流动进行计算,亚格子模型选用动力涡粘模型,由于流向和展向都是统计均匀方向,模型系数沿 $x-z$ 平面进行了平均。计算的时间步长同槽道流一样,取 $\Delta t = 0.003$,整个计算进行了 32500 步,每 100 步输出一个瞬态结果,即从 $t = 0$ 计算到 $t = 97.5$,一共得到 325 个流场文件。对这些文件进行后处理,可以得到如图 66 所示尾迹特性的时间演化曲线,其中图 (a) 给出了最大尾迹亏损 $\delta U_{\max 1}/U_c$ 和尾迹半宽 $b_{half 1}$ 随时间的变化,对任一瞬态尾迹流场,在 $x-z$ 平面内进行平均,可以得到沿法向 y 的流向速度剖面, $\delta U_{\max 1}$ 即是该剖面的最大速度亏损, $b_{half 1}$ 则定义为两个 $\delta U_{\max 1}/2$ 亏损点在 y 方向的距离,从图中可以清晰看到,速度亏损随时间不断减小,尾迹半宽则持续增加(该曲线不够光滑是因为尾迹半宽的计算精度不高),这些都是尾迹在粘性耗散作用下逐渐衰减的表现。图 (b) 则给出了最大速度亏损与尾

迹半宽乘积 $\delta U_{\max 1} b_{\text{half}1}$ 随时间的变化, Rogers等^{[348][349]}对时间演化尾迹流的研究表明, 该流动在发展过程中会进入所谓的自相似 (self-similarity) 状态, 其表现之一便是上述曲线将出现平台, 即 $\delta U_{\max 1}$ 和 $b_{\text{half}1}$ 的乘积为常数, 从图 (b) 中可以看到, 大约在 $t > 30$ 以后, $\delta U_{\max 1} b_{\text{half}1}$ 的数值不再剧烈变化, 可以认为流动进入自相似状态, 该区域曲线的大量锯齿主要是由尾迹半宽计算不准造成的。

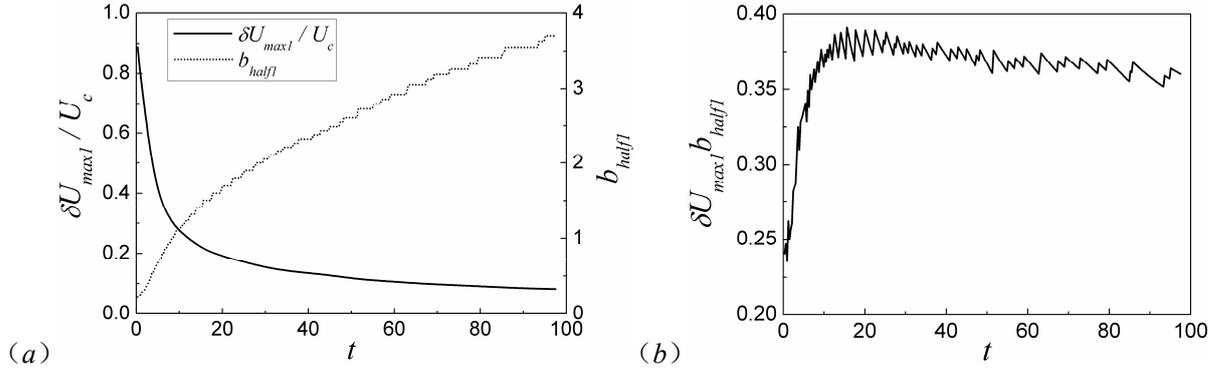


图 66 尾迹流特性随时间的演化 (a) 最大尾迹亏损 $\delta U_{\max 1}/U_c$ 和尾迹半宽 $b_{\text{half}1}$ 的变化曲线; (b) 最大速度亏损与尾迹半宽乘积 $\delta U_{\max 1} b_{\text{half}1}$ 的变化曲线

根据上述尾迹特性的时间演化曲线, 可以确定满足要求的最终流场。在涡轮叶栅的入口测量平面, 实验测得尾迹的最大速度亏损大约为 20%, 尾迹半宽则近似等于 $0.32t_b$, 根据附录 B.3 的公式(B.50):

$$b_{\text{half}1} = b_{\text{half}2} \frac{L_{r2}^*}{L_{r1}^*} \quad (5.25)$$

可以算出最终流场的尾迹半宽 $b_{\text{half}1} = 3.25118$, 理论上, 其最大速度亏损也应该等于 20%, 利用图 66 (a) 的曲线, 查询可知, 当速度亏损取 20%时, 对应的尾迹半宽 $b_{\text{half}1} = 1.60267$; 而当 $b_{\text{half}1} = 3.25118$ 时, 对应的速度亏损近似为 9.5%, 也就是说, 不存在完全满足要求的最终流场。综合考虑各种因素, 将最终流场确定为 $t = 60$ 的瞬态场, 此时的速度亏损近似为 10.6%, 相应的尾迹半宽 $b_{\text{half}1} = 2.92147$ 。图 65 (b) 给出了最终流场的流向速度云图, 和图 (a) 中的初始流场相比较, 尾迹流的宽度大大增加, 而速度亏速则变的较小, 此外, 尾迹区中存在明显的大尺度结构。

图 67 给出了最终流场的统计特性, 其中图 (a) 是平均流速亏损沿法向的分布, 图 (b) 则是雷诺应力沿法向的分布, 图中横坐标均采用尾迹半宽 $b_{\text{half}1}$ 归一化, 两幅图画纵坐标则分别采用 $\delta U_{\max 1}$ 、 $\delta U_{\max 1}^2$ 归一化。对比文献 [348][349]的结果, 平均速度亏损曲线吻合的很好, 雷诺应力曲线虽然在数值上存在一些差异, 但各曲线的形状是类似的, 图中曲线也和 4.2 节圆柱绕流模拟获得的尾迹特性具有相似性, 这些都表明: 采用时间演

化的尾迹流动模拟叶栅入口的来流尾迹是可行的。

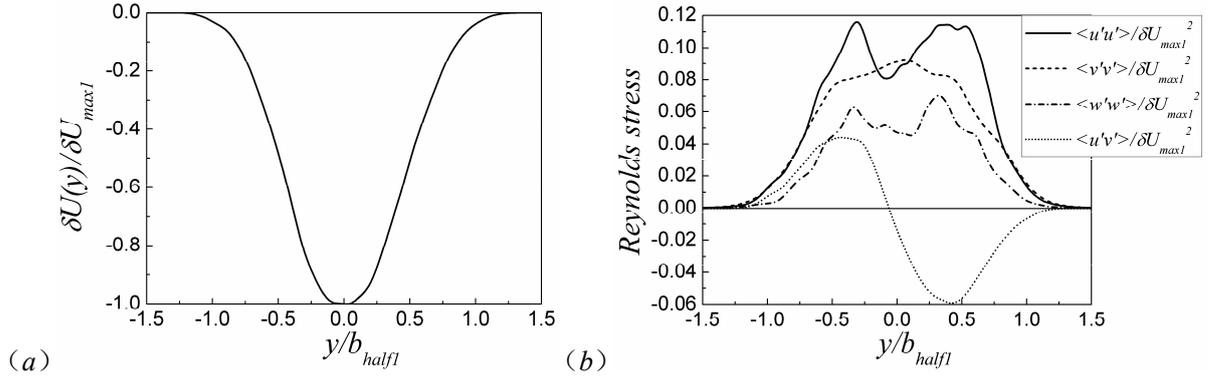


图 67 最终流场的统计特性 (a) 平均速度亏损沿法向的分布; (b) 雷诺应力沿法向的分布

5.3.1.3 进口边条的执行

图 68 是叶栅入口背景湍流度生成过程的示意图, 利用该图将算例 C2 进口边条的执行顺序描述如下: 第一步, 进行自由衰减均匀各向同性湍流的模拟, 待某时刻的瞬态流场满足低压涡轮对背景湍流度的要求后, 取出该瞬态流场作为各向同性湍流模拟的最终流场 (图 (a)); 第二步, 从最终流场减去其空间平均值, 得到脉动流场, 再利用附录 B.2 的公式(B.23)、(B.30)~(B.32), 将脉动场 (包含其空间坐标) 从各向同性湍流的无量纲体系变换到低压涡轮的无量纲体系 (变换后的脉动量为 ρ'_{iso} 、 T'_{iso} 、 u'_{iso} 、 v'_{iso} 、 w'_{iso}), 再将变换后的脉动场复制 4 份并组合在一起, 由此形成用于计算域入口边界插值的冻结流场 (图 (b)), 假设其坐标系为 $(x_{iso}, y_{iso}, z_{iso})$; 第三步, 将冻结流场放置到叶栅入口, 其 x_{iso} 轴沿进口气流角方向, 与叶栅 x 轴的夹角为 β_1 , 冻结流场需要被复制 4 次, 以保证整个入口均存在背景湍流度, 计算过程中, 组合的冻结场以平均流速 U_{in} 向计算域内部运动, 其脉动量被插值到入口平面 (仍用 ρ'_{iso} 、 T'_{iso} 、 u'_{iso} 、 v'_{iso} 、 w'_{iso} 表示), 这一过程以单个脉动场 x_{iso} 方向的长度为周期循环进行 (图 (c)); 第四步, 将插值得到的脉动量从冻结流场坐标系变换到叶栅坐标系:

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho'_{iso}, \quad T' = T'_{iso}, \quad w' = w'_{iso} \\ u' &= u'_{iso} \cos \beta_1 - v'_{iso} \sin \beta_1 \\ v' &= u'_{iso} \sin \beta_1 + v'_{iso} \cos \beta_1 \end{aligned} \quad (5.26)$$

利用 3.4.1.3 的方法计算入口边界条件, 由此得到边界处的流场变量为 $\bar{\rho}$ 、 \bar{T} 、 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} , 则包含背景湍流度效应的边条表示为:

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho', \quad T = \bar{T} + T' \\ u &= \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w' \end{aligned} \quad (5.27)$$

边界处其余的流场变量据此进行计算。

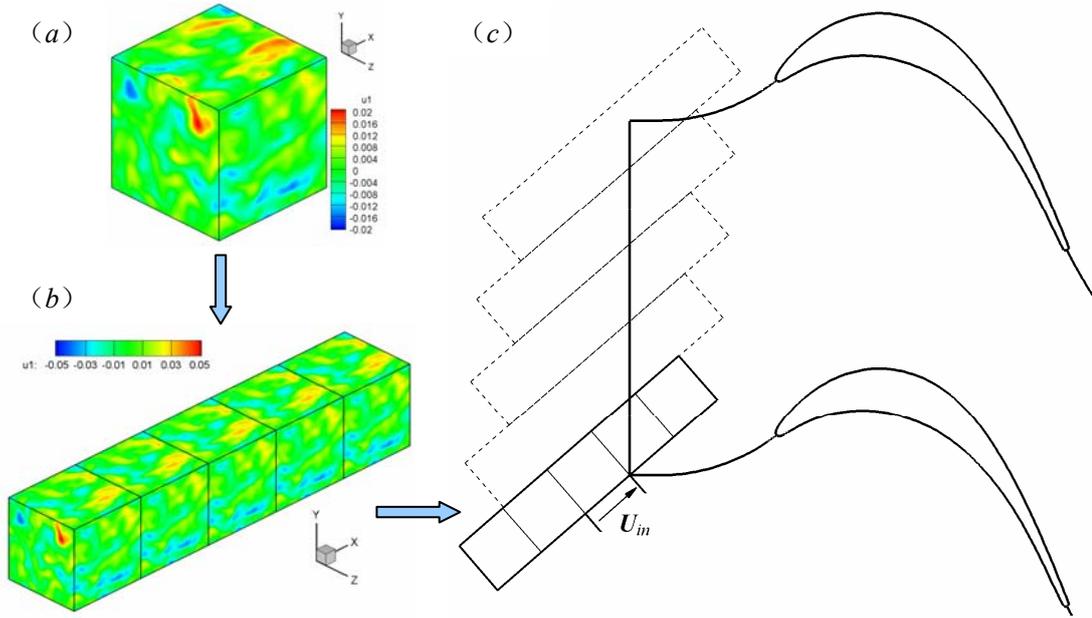


图 68 叶栅入口背景湍流生成过程示意图 (a) 各向同性湍流计算得到的最终流场; (b) 用于计算域入口边界插值的冻结流场; (c) 计算域入口边界插值

图 69 是叶栅入口周期性尾迹生成过程的示意图, 利用该图将算例 C3 进口边条的执行顺序描述如下: 第一步, 计算充分发展的槽道湍流, 待流动达到统计定常状态以后, 任意取出一个瞬态流场 (图 (a)); 第二步, 将该流场从槽道中心平面“切开”, 分成上下两个半槽道, 再将它们反向拼接在一起 (壁面重合), 去掉中间的固壁, 沿法向扩大计算域, 按槽道中心位置的时均流动参数赋初值, 由此得到尾迹流模拟的初场 (图 (b)); 第三步, 计算随时间演化的尾迹流动, 这一过程中尾迹不断衰减, 待某时刻瞬态流场的尾迹特性满足低压涡轮对进口尾迹的要求后, 取出该瞬态场作为尾迹流模拟的最终流场 (图 (c)); 第四步, 从最终流场减去势流流场值且只保留计算域的尾迹区, 得到脉动流场, 再利用附录 B.3 的公式(B.37)~(B.39)、(B.45), 将脉动场 (包含其空间坐标) 从槽道流的无量纲体系变换到低压涡轮的无量纲体系 (变换后的脉动量为 ρ'_{wake} 、 T'_{wake} 、 u'_{wake} 、 v'_{wake} 、 w'_{wake}), 再将变换后的脉动场复制两个半份并组合在一起, 由此形成用于计算域入口边界插值的冻结流场 (图 (d), 假设其坐标系为 $(x_{wake}, y_{wake}, z_{wake})$); 第五步, 将冻结流场放置到叶栅入口, 其 x_{wake} 轴沿相对进气角方向, 与叶栅 x 轴的夹角为 β_{rel} , 冻结流场被复制 3 次且沿 y 向的间距均为 t_b , 以保证入口尾迹的通过频率, 计算过程中, 组合的冻结场一面以相对流速 U_{rel} 向计算域内部运动, 同时还以 U_{bar} 向 $-y$ 方向运动, 其脉动量被插值到入口平面 (仍用 ρ'_{wake} 、 T'_{wake} 、 u'_{wake} 、 v'_{wake} 、 w'_{wake} 表示), 这一过程以单个脉动场 x_{wake} 方向的长度为周期循环进行, 而在 y 方向, 当一个冻结场从入口的下边界

离开后，另一个保持 t_b 的间距从入口的上边界一侧加入（图（e））；第六步，将插值得到的脉动量从冻结流场坐标系变换到叶栅坐标系：

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho'_{wake}, \quad T' = T'_{wake}, \quad w' = w'_{wake} \\ u' &= u'_{wake} \cos \beta_{1rel} - v'_{wake} \sin \beta_{1rel} \\ v' &= u'_{wake} \sin \beta_{1rel} + v'_{wake} \cos \beta_{1rel} \end{aligned} \quad (5.28)$$

利用 3.4.1.3 的方法计算入口边界条件，由此得到边界处的流场变量为 $\bar{\rho}$ 、 \bar{T} 、 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} ，则包含周期性尾迹效应的边条表示为：

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho', \quad T = \bar{T} + T' \\ u &= \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w' \end{aligned} \quad (5.29)$$

边界处其余的流场变量据此进行计算。

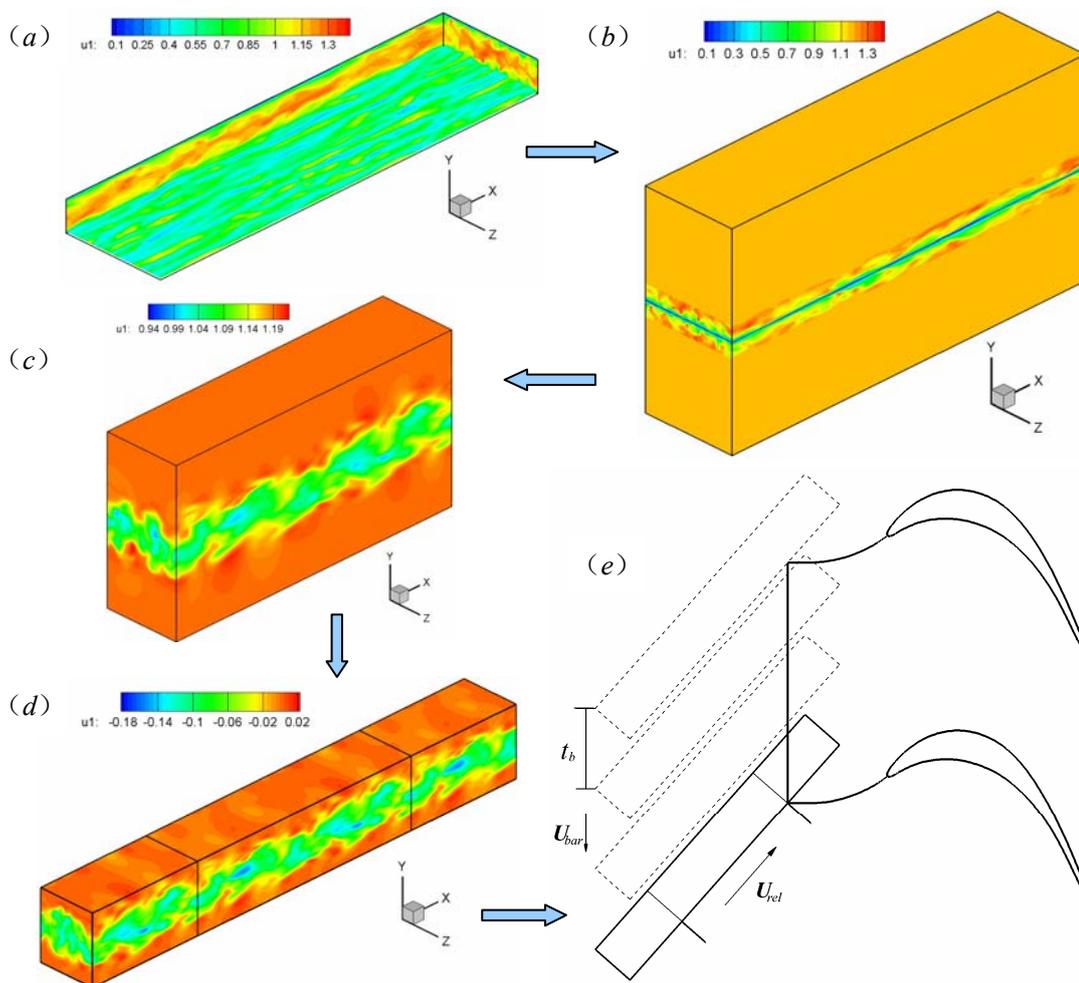


图 69 叶栅入口来流尾迹生成过程示意图 (a) 充分发展槽道湍流的瞬态流场；(b) 时间演化尾迹流的初场；(c) 满足尾迹特性要求的最终流场；(d) 用于计算域入口边界插值的冻结流场；(e) 计算域入口边界插值

对于算例 C4，计算域入口既存在背景湍流度，又存在周期性尾迹，其进口边条的

执行顺序如下：第一步，假设只存在背景湍流速度，得到计算域入口平面的脉动量，将它们记为 $(\rho', T', u', v', w')_{iso}$ ；第二步，假设只存在周期性尾迹，又可以得到计算域入口平面的脉动量，将它们记为 $(\rho', T', u', v', w')_{wake}$ ；第三步，比较两个脉动量的大小，决定 C4 入口最终的脉动 $(\rho', T', u', v', w')_{final}$ ，如下式所示：

$$\begin{aligned} & \text{if } (u'^2 + v'^2 + w'^2)_{wake} > (u'^2 + v'^2 + w'^2)_{iso} \text{ then} \\ & (\rho', T', u', v', w')_{final} = (\rho', T', u', v', w')_{wake} \\ & \text{else} \\ & (\rho', T', u', v', w')_{final} = (\rho', T', u', v', w')_{iso} \end{aligned} \quad (5.30)$$

第四步，利用 3.4.1.3 的方法计算入口边界条件，由此得到边界处的流场变量为 $(\bar{\rho}, \bar{T}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ ，则同时包含背景湍流速度和周期性尾迹效应的边条表示为：

$$(\rho, T, u, v, w) = (\bar{\rho}, \bar{T}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) + (\rho', T', u', v', w')_{final} \quad (5.31)$$

边界处其余的流场变量据此进行计算。

5.3.2 出口边界条件

对于亚音的涡轮叶栅流动，按照 3.4.1.4 部分的介绍，出口边界条件直接给定背压 p_2 ，为了尽量减少出口边界处数值反射对计算结果产生的影响，靠近出口段的最后 20 个网格单元被设置成缓冲区。该缓冲区采用显式滤波方法构造，滤波强度 σ 计算公式中（式 (3.55)）的经验系数分别取为 $\alpha = 0.05$ 、 $\beta = 2$ ，于是 σ 的公式变为：

$$\sigma(\eta) = 0.05\eta^2 \quad (5.32)$$

计算中，每完成一个物理时间步的推进（即 3 步 Runge-Kutta 法完成最后一步以后），就采用式 (3.56) 对流场变量 ρ 、 p 、 ρu_1 、 ρu_2 、 ρu_3 进行一次滤波，其他的流场变量则在此基础上计算得到。

5.3.3 初场设置

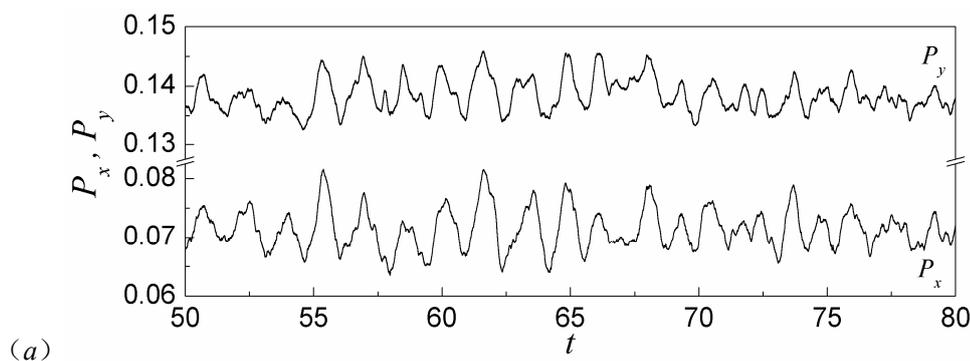
按照 3.4.2 部分的介绍，在进行算例 C1 的模拟时，没有先采用 RANS 进行定常计算，而是直接给定速度零场作为 C1 的初场，这种情况下，程序的健壮性较差，容易发散，计算中通过采用低阶格式（对流项使用二阶偏斜对称格式）、加大人工粘性等措施增强程序的稳定性，待流场演化的较为合理以后再将格式、系数等调整到合理的水平继续计算。C1 的计算完成后，C2、C3、C4 的初场均来自 C1 的某一瞬态流场。

5.4 计算结果分析

按照 5.3.3 的方法完成初场设置以后,就可以进行计算了。对于定常来流的算例 C1、C2,计算的时间步长 Δt 均取为 4×10^{-4} ; 根据经验,从初场推进 $\Delta T \approx 20$ (50,000 步) 以后,流动进入统计定常状态,这时可以开始采集瞬态流场。图 70 给出了算例 C1、C2 中涡轮叶片所受压力合力在 x 、 y 方向分量 P_x 、 P_y 的时间序列,从图中可以看出,对于这两个算例,其演化曲线均具有(准)周期性,这在 C1 中表现的最为明显,此外,同一算例的两条曲线也表现出强烈的正相关,从下文的分析可知,压力合力分量的周期性变化来源于叶片尾缘吸力面/压力面大尺度结构的交替脱落(类似卡门涡街),显然,采集瞬态流场时必须考虑流动的这种周期性。图 71 对图 70 的时间序列(扰动)进行了 Fourier 变换,两幅图画中的纵轴 A 代表幅值,横轴 f 代表无量纲的频率,其定义如下:

$$f = f^* L_r^* / U_r^* \quad (5.33)$$

这里的 f^* 是有量纲的频率, L_r^* 和 U_r^* 则分别是叶栅计算的参考长度和参考速度。图中实线对应 P_x , 点线对应 P_y , 对于算例 C1, 从图中容易确定其主要频率 $f = 0.6485$, 于是 P_x 、 P_y 曲线的周期 $T \approx 1.5420$; 对于算例 C2, 情况则稍微复杂一些, P_x 、 P_y 时间序列的周期性不如 C1 明显,由此导致频域曲线存在多个接近的峰值,结合下文的分析,最终将频率确定为 $f = 0.8392$, 于是周期 $T \approx 1.1916$ 。考虑到流场演化的周期性,进行数据采集时,每 40 个时间步输出一个瞬态结果,每个算例总的采样时间均大于 $20T$ (且是周期的整数倍),也就是说:对于 C1, 采样时间超过 32, 用于采样的计算步数大于 80,000 步,而输出的瞬态流场超过 2000 个;对于 C2, 采样时间超过 24, 计算步数大于 60,000 步,瞬态流场超过 1500 个。下文中对计算结果的统计分析及时态流场分析,均来源于对这些样本流场的后处理。除了采集瞬态流场,计算中也可以在流场里任意设定监测点,这些监测点每个时间步的计算结果都会被输出,由此形成关于各监测点的时间序列,用来进行频谱/能谱等的分析。



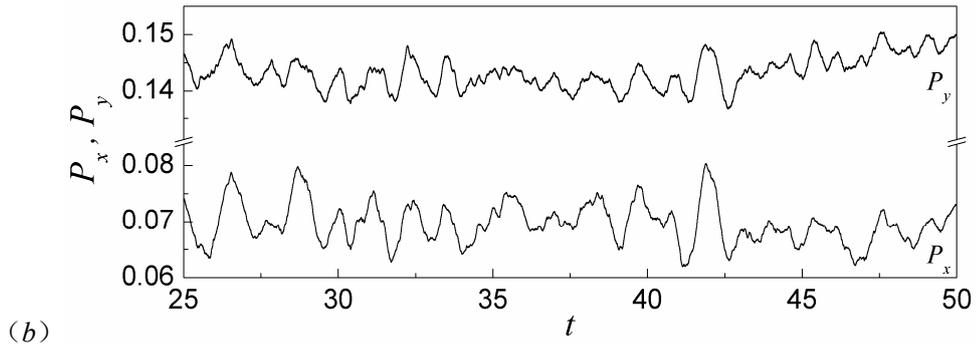


图 70 涡轮叶片所受压力合力在 x 、 y 方向分量 P_x 、 P_y 的时间序列 (a) 算例 C1; (b) 算例 C2

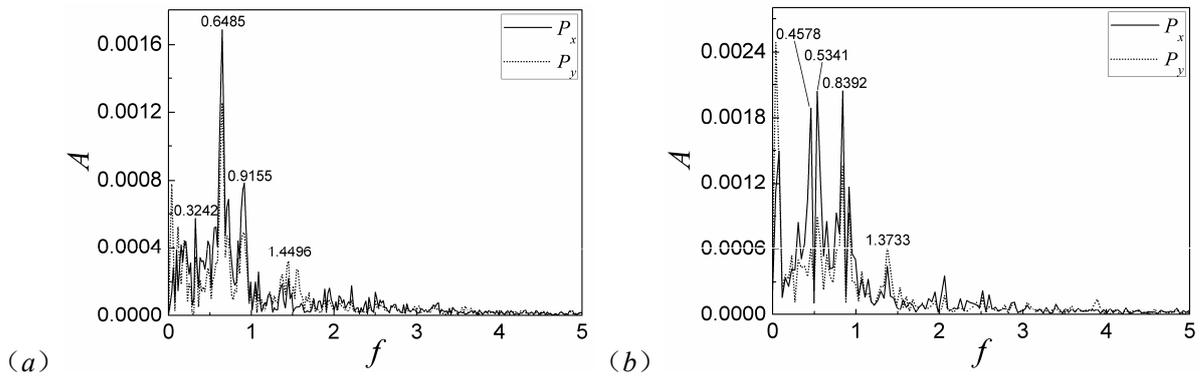


图 71 压力合力分量 P_x 、 P_y 时间序列的 Fourier 变换 (a) 算例 C1; (b) 算例 C2

5.4.1 时均流动图画

对于算例C1、C2，将采样所得的所有瞬态流场进行系综平均，然后再沿着计算域的展向（统计均匀方向）进行空间平均，由此得到二维的时均流场。图 72 给出了叶片表面等熵马赫数 Ma_{is} 的分布，从图中可以发现，C1、C2 的计算结果均和实验数据吻合的很好：在叶片的压力面，C1、C2 的两条曲线几乎完全重合在一起，曲线的最小值位于 $x = 0.03$ 附近，和实验结果一致，该点即是叶片前缘的滞止点，从前缘滞止点到叶片尾缘，压力面始终处于顺压梯度环境；在叶片的吸力面，靠近前缘和尾缘部分，C2 和实验符合的更好，中间部分则是C1 与实验更加一致，但总的来说，C1、C2 和实验结果的差异都很小，叶片前缘附近，吸力面处于逆压梯度环境，而后变为顺压梯度， $x \approx 0.35$ 以后又变为逆压梯度，而从 $x \approx 0.5$ 一直到尾缘，出现大的压力平台，说明叶片吸力面存在大尺度的开放式分离。

图 73 给出了C1、C2 时均流动图画的对比，其中图 (a) 是整个叶栅的马赫数分布云图，图 (b) 是近前缘流线及速度分量 u 的云图，图 (c) 是吸力面分离区流线及速度分量 u 的云图，图 (d) 则是吸力面分离区展向涡量的云图。对比C1、C2 容易发现，两个算例的

时均流动图画非常相似，其主要特点都表现为叶片吸力面存在大尺度的开放式分离，这和图 72 中吸力面后半部分的压力平台相对应。而两者的差别则体现在如下方面：第一，从图 (b) 可以看出，叶片前缘附近，虽然 C1、C2 的流线几乎没有差异，但 C2 的等值线分布远不如 C1 光滑，这是背景湍流度留下的“遗迹”；第二，从图 (a) 和图 (c) 都可以看出，C2 的分离区比 C1 的要小一些，这显然也是背景湍流度的效应；第三，在逆压梯度作用下，吸力面边界层离开壁面形成自由剪切层，由此产生分离区，观察图 (d) 可以发现，C1、C2 吸力面的涡层存在差异，C1 的涡层较细较长，C2 的涡层较短较粗，产生此种差异的原因，将在后文分析。

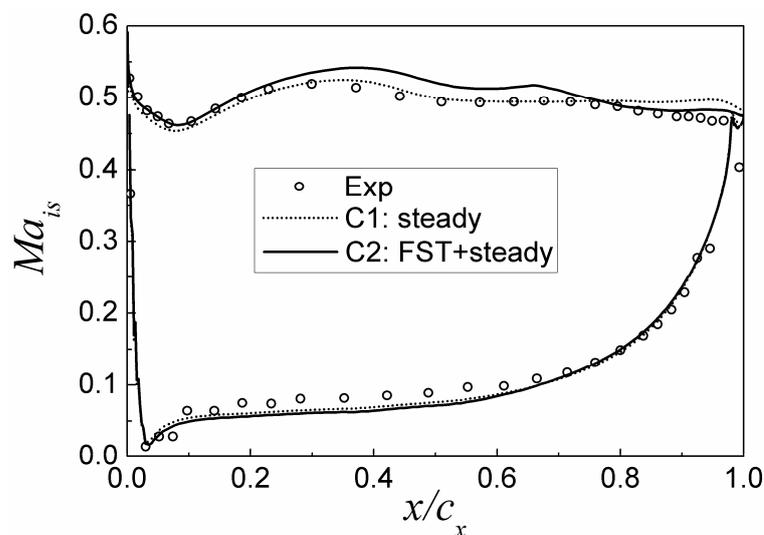
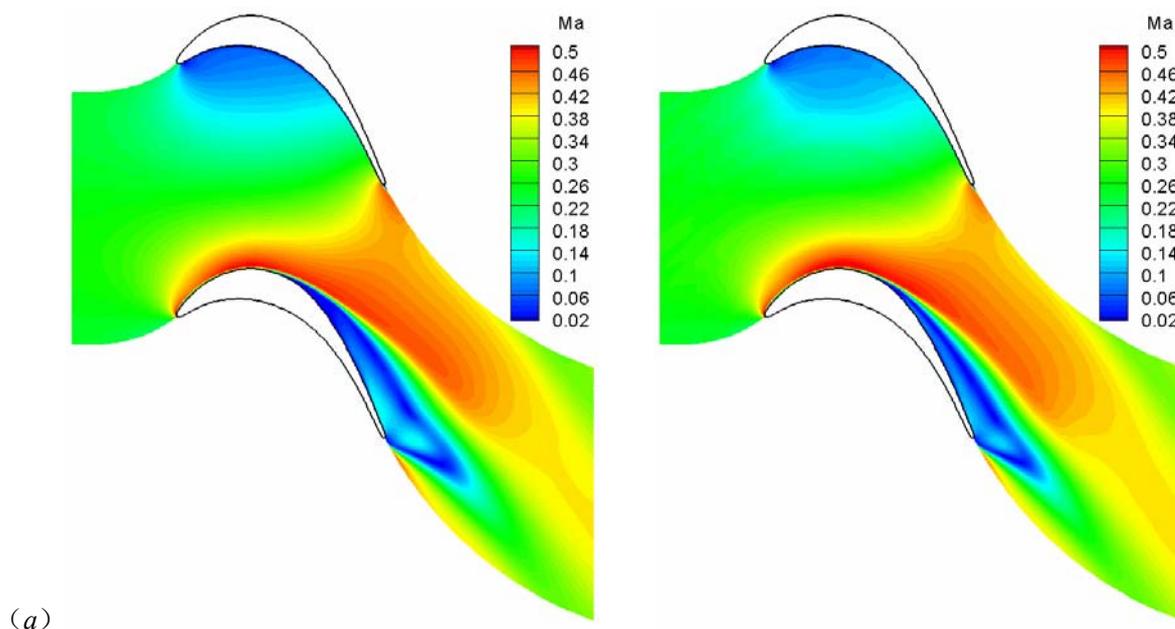


图 72 时均流场叶片表面等熵马赫数分布



(a)

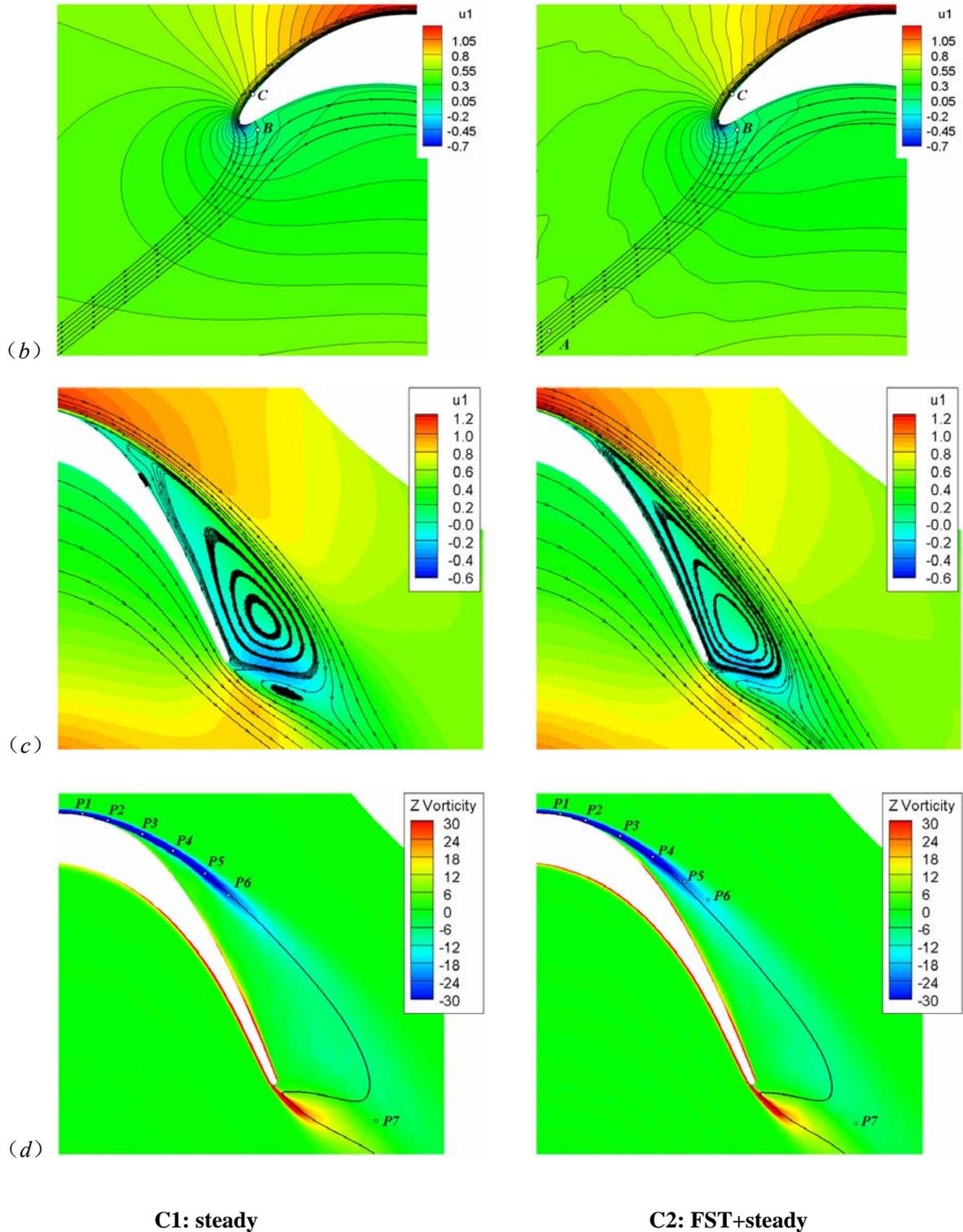


图 73 叶栅时均流动图画对比 (a) 马赫数分布云图; (b) 近前缘流线及速度分量 u 的云图; (c) 吸力面分离区流线及速度分量 u 的云图; (d) 吸力面分离区展向涡量云图

图 74 给出了叶片吸力面剪切应力 τ_{wall} 的分布, 其中横坐标 s 代表从叶片前缘开始定义的 (归一化) 吸力面长度。观察图 (a) 发现, 从前缘开始, τ_{wall} 首先减小到一个极小值, 然后增大, 并且 C1 的极小值比 C2 的更接近 0, τ_{wall} 的这种变化和图 72 中叶片吸力面的

等熵马赫数分布有关，对应叶片表面先后经历的逆压梯度和顺压梯度环境，继续朝向尾缘，压力梯度再次为负， τ_{wall} 也逐渐减小，最终变为负值。 τ_{wall} 第一次取 0 值的位置即是时均的分离点，从图 (b) 可以清晰看出，C1 的分离点位于 $s = 0.391$ 处，C2 的位于 $s = 0.416$ 处，C1 较 C2 稍有提前。

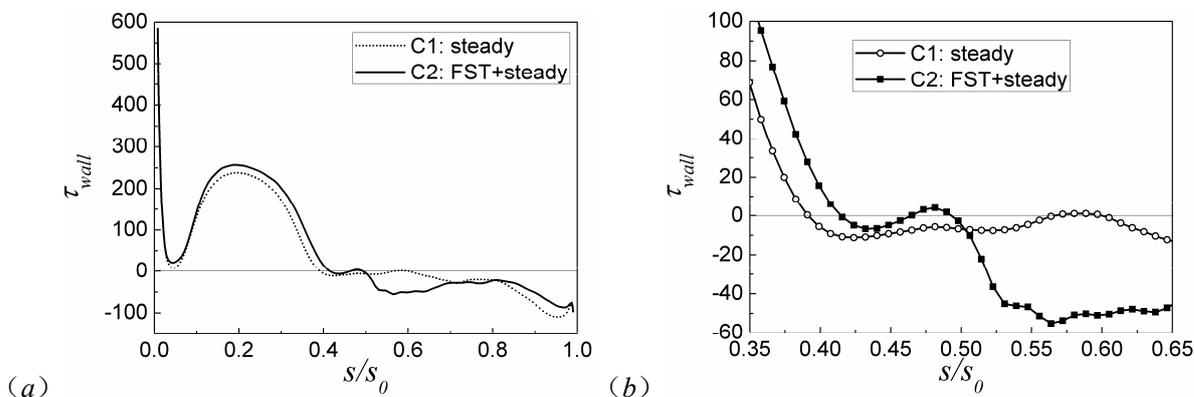


图 74 叶片吸力面剪切应力 τ_{wall} 的分布 (a) 沿整个表面的图画; (b) 分离点附近的局部图画

图 75 (a) 中，沿叶片吸力面从前缘到尾缘选定 9 个位置，在每个点求出当地的法线，然后将时均的二维速度矢量分解为切向分量 u_t 和法向分量 u_n 。图 (b) 给出了各个位置切向速度分量的剖面，可以看出，在分离点 ($s \approx 0.4$) 以前，C1、C2 的速度剖面几乎重合在一起，而从分离点开始，两者的剖面存在较大差异，剖面的拐点高度、最大回流速度等均不相同。

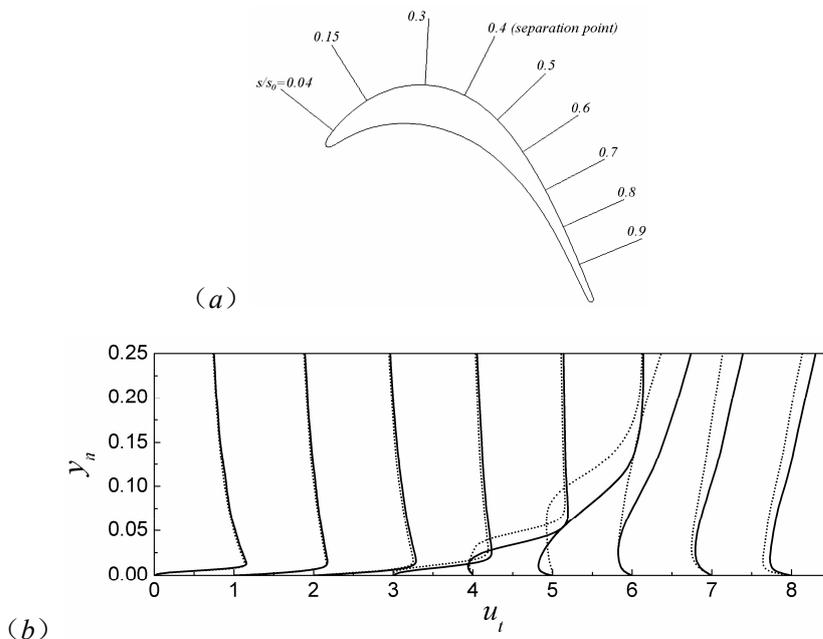


图 75 沿叶片吸力面不同位置的切向速度剖面 (a) 剖面位置示意; (b) 速度剖面对比, 点线代表算例 C1, 实线代表算例 C2

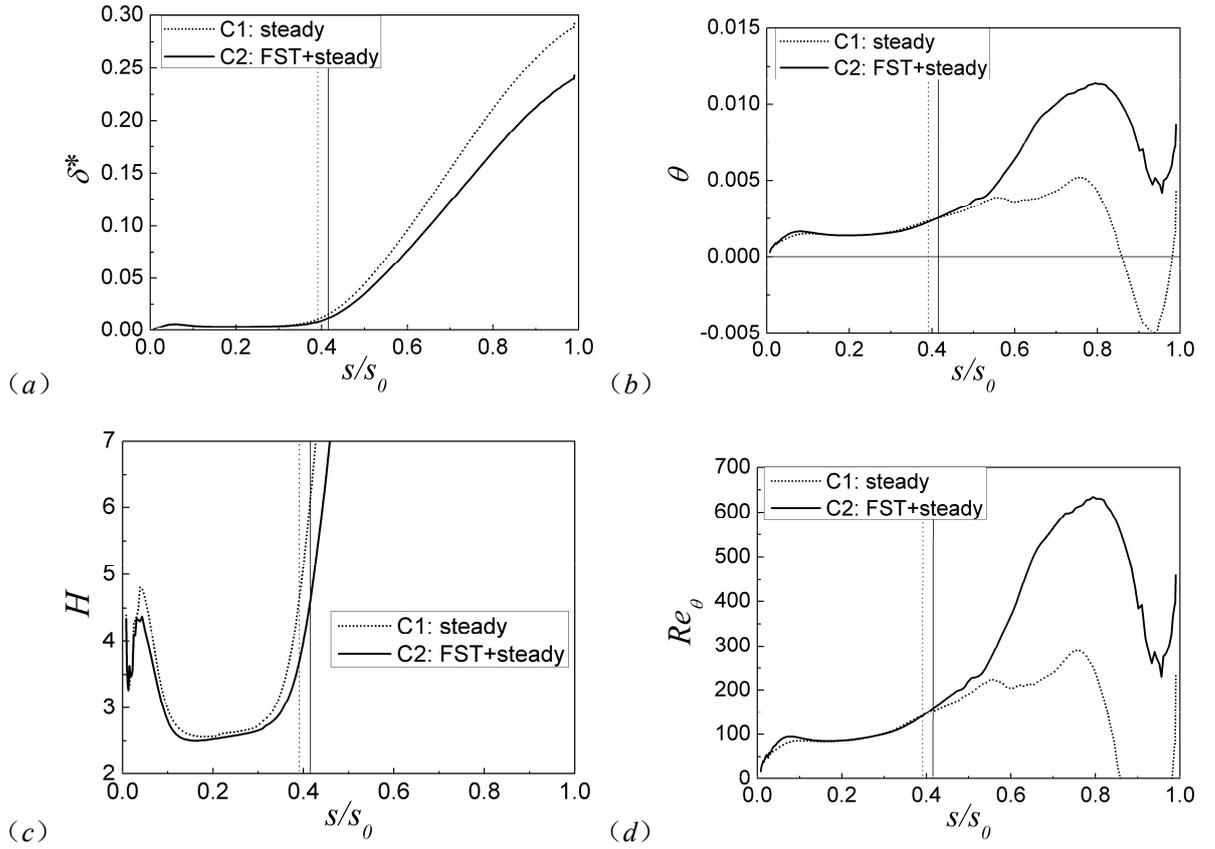


图 76 时均流场叶片吸力面边界层的发展，图中两条竖线代表两个算例的分离点位置 (a) 位移厚度 δ^* ；(b) 动量厚度 θ ；(c) 形状因子 H ；(d) 动量厚度雷诺数 Re_θ

为了进一步认识C1、C2时均流场的差异，图 76 通过一些积分量来描述叶片吸力面边界层的发展，其中图 (a) ~ (d) 分别对应位移厚度 δ^* ，动量厚度 θ ，形状因子 H 以及动量厚度雷诺数 Re_θ ，它们的定义如下^[14]：

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \quad (5.34)$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (5.35)$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (5.36)$$

$$Re_\theta = \frac{\rho_e u_e \theta}{\mu_e} Re \quad (5.37)$$

其中下标 e 代表边界层外缘的自由流参数。从图 (a) 可以看到，在时均分离点以前，C1、C2 的位移厚度差别很小，分离点以后，C1 的位移厚度增长更快，二者的差异越来越

越大。对于图 (b) 的动量厚度 θ ，分离点前两个算例的差别仍然很小，分离点以后，特别是从 $s \approx 0.6$ 开始，二者出现很大差异，C1 的 θ 甚至取负值，这些显然都是由 C1、C2 速度剖面的不同造成的。形状因子 H 的取值可以表征边界层所处的流动状态，文献 [14] 指出：平板层流边界层的 $H = 2.6$ ，层流边界层分离时的典型 H 值为 4。在图 (c) 中， $s = 0.04$ 附近的 H 出现一个极大值，其中 C1 的 $H_{\max} = 4.38$ ，C2 的 $H_{\max} = 4.81$ ，如此大的 H 值表明该位置的流动已接近分离，事实上， $s = 0.04$ 正处于图 74 (a) 中壁面剪切应力的第一个极小值附近，由该图可知，在前缘逆压梯度的作用下，该点附近的流动确实已接近分离； $s \approx 0.1 \sim 0.3$ 段， H 取值在 2.6 附近，表明附着的边界层处于层流状态；而在 $s \approx 0.4$ 的分离点，C1 的 $H_{sep} = 4.66$ ，C2 的 $H_{sep} = 4.63$ ，这说明，压力梯度环境中曲壁边界层分离点的形状因子与平板层流边界层的典型 H 值存在着一些差异。从图 (d) 可知，C1 在分离点处的动量厚度雷诺数 $Re_{\theta_s} = 142$ ，C2 取 $Re_{\theta_s} = 159$ ，从 1.4.3 已知：Hatman 和 Wang 将分离泡分为三类 [222]，如果雷诺数很低且流动具有强逆压梯度 ($Re_{\theta_s} < 240$)，则形成层流分离长模态，显然，C1、C2 的分离均属于这一类别，从图 73 的时均流动图画也可以清楚的看到这一点。

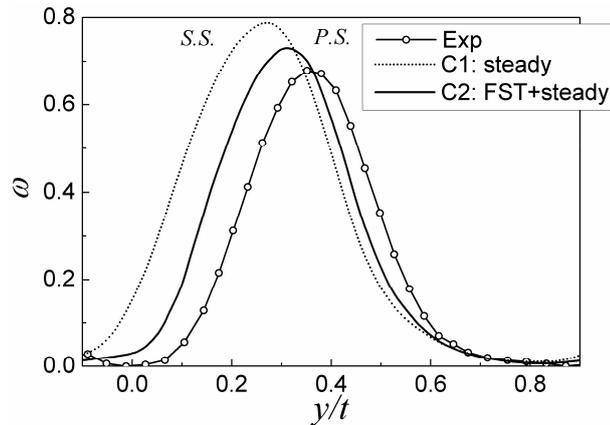


图 77 出口测量平面总压损失系数对比

图 77 给出了出口测量平面总压损失系数 ω 沿 y 向的分布， ω 的定义如下 [342]：

$$\omega = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_{t1} - p_2} \quad (5.38)$$

这里 p_{t1} 代表入口测量平面的平均总压， p_{t2} 代表出口测量平面的总压 (沿 y 向变化)， p_2 则是出口平面的平均静压。需要注意的是，为了与实验数据对比，图中 y 坐标采用栅距 t 归一化，其原点位于叶片尾缘且正方向与计算网格 y 坐标的正方向相反。从图中可以发现，C1、C2 预测的总压损失系数较实验结果大：最大的 ω 值比实验大，损失区的

“半宽”也比实验大，相比之下，C2 与实验结果更接近一些。结合图 73，不难想象，大的总压损失对应大的分离区，也就是说，实验中的分离区尺寸应该比 C2 的计算结果更小一些。

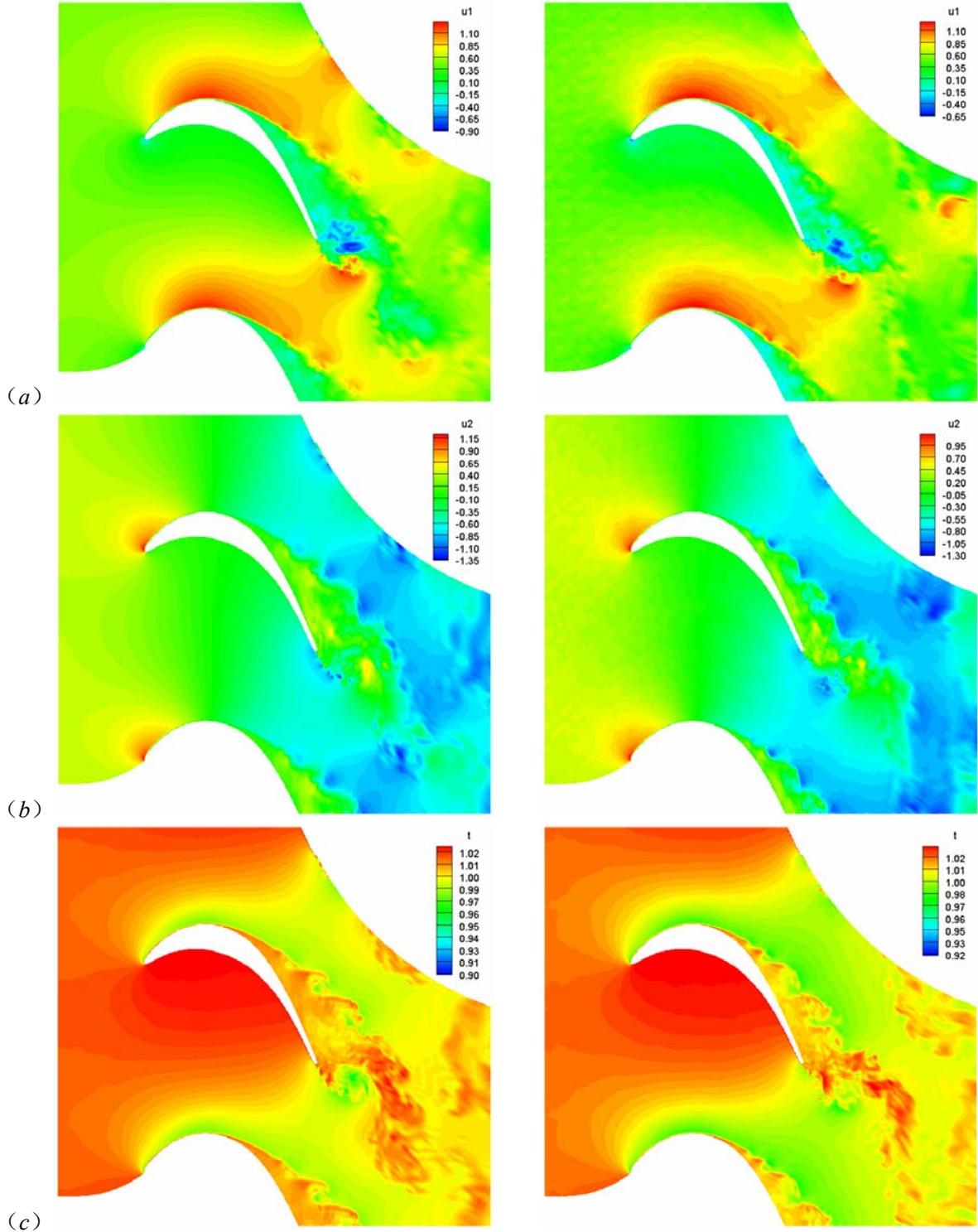
对于出口平面的总压损失系数，虽然计算结果与实验数据差别较大，但这并不影响本节对计算结果的分析，这是由于：实验测得的叶片表面等熵马赫数分布（图 72）已经表明，叶片吸力面存在大尺度的开放式分离，虽然其实际尺寸比计算预测的要小一些（这个比例可以从图 77 进行大致估计），但尺寸上的这种差别并不会对流动演化的物理机制产生影响，因此 C1、C2 的计算结果仍可以用于流动机理的研究。

5.4.2 瞬态流动图画

图 78 给出的是算例 C1、C2 展向某一截面的瞬态流动图画，左边 5 幅图对应 C1，右边 5 幅对应 C2，图 (a) ~ (e) 分别是速度分量 u 、速度分量 v 、温度 T 、马赫数 Ma 和涡量模 ω 的云图。两个算例的流动图画存在着许多相似点，首先，无论从哪个物理量的云图，都可以很容易的将流场分为三个区域：叶栅通道中心的势流区、吸力面的分离区以及叶片尾缘以后的尾迹区；其次，吸力面的分离属于开放式分离，和图 73 的时均流动图画不同，分离区的真实流动存在强烈的非定常性，和势流区的界面也极不规则，随时间不断变化；第三，从涡量模云图中可以看到，分离区吸力面的边界层离开壁面形成自由剪切层，初始连续的涡层卷起一个个展向涡向下游输运，尺寸不断增加，这在温度场的云图中也表现的相当明显；第四，叶片压力面的涡层离开尾缘，卷起展向涡，与吸力面的涡结构交替脱落，尾迹区形成类似卡门涡街的结构，当然，由于吸力面/压力面的非对称性，涡街也呈现非对称状态。

除了上述相似点，算例 C1、C2 的流动图画也存在很多差别，由于两个算例计算参数唯一的不同就在于 C2 入口添加了背景湍流度，那么其流动图画的差异最终也都可以归结为湍流度效应：首先，相比算例 C1 在势流区光滑的等值线，算例 C2 除温度云图外，其他物理量云图的等值线都不光滑，这在计算域入口区域表现的最为明显，显然，这些都是背景湍流度的体现；其次，观察 C2 涡量模的云图发现，计算域入口加入的各向同性扰动，随主流输运的过程中，不断受到拉伸/压缩作用，进入叶栅通道后，逐渐演化为细长的流向涡结构，而对于 C1，这些结构并不存在；第三，虽然分离区存在强烈的非定常性，和势流区的界面也不规则，但几乎从所有物理量的云图都可以看出，C2 的分离区尺寸较 C1 小；第四，对比涡量模的云图可以发现，吸力面的涡层离开壁面以后，由于受到背景湍流度的作用，C2 的连续涡层很快失稳，出现波状摆动，而后卷起展向涡，

相比而言，C1 的连续涡层失稳较慢，卷起展向涡的位置也更加靠后，这也就解释了图 73 (d) 中为何时均的 C1 涡层较细较长，而 C2 涡层却较短较粗，此外，C2 的涡层发展较快，其转捩过程也较 C1 提前完成，于是 C2 的分离区比 C1 要小一些。



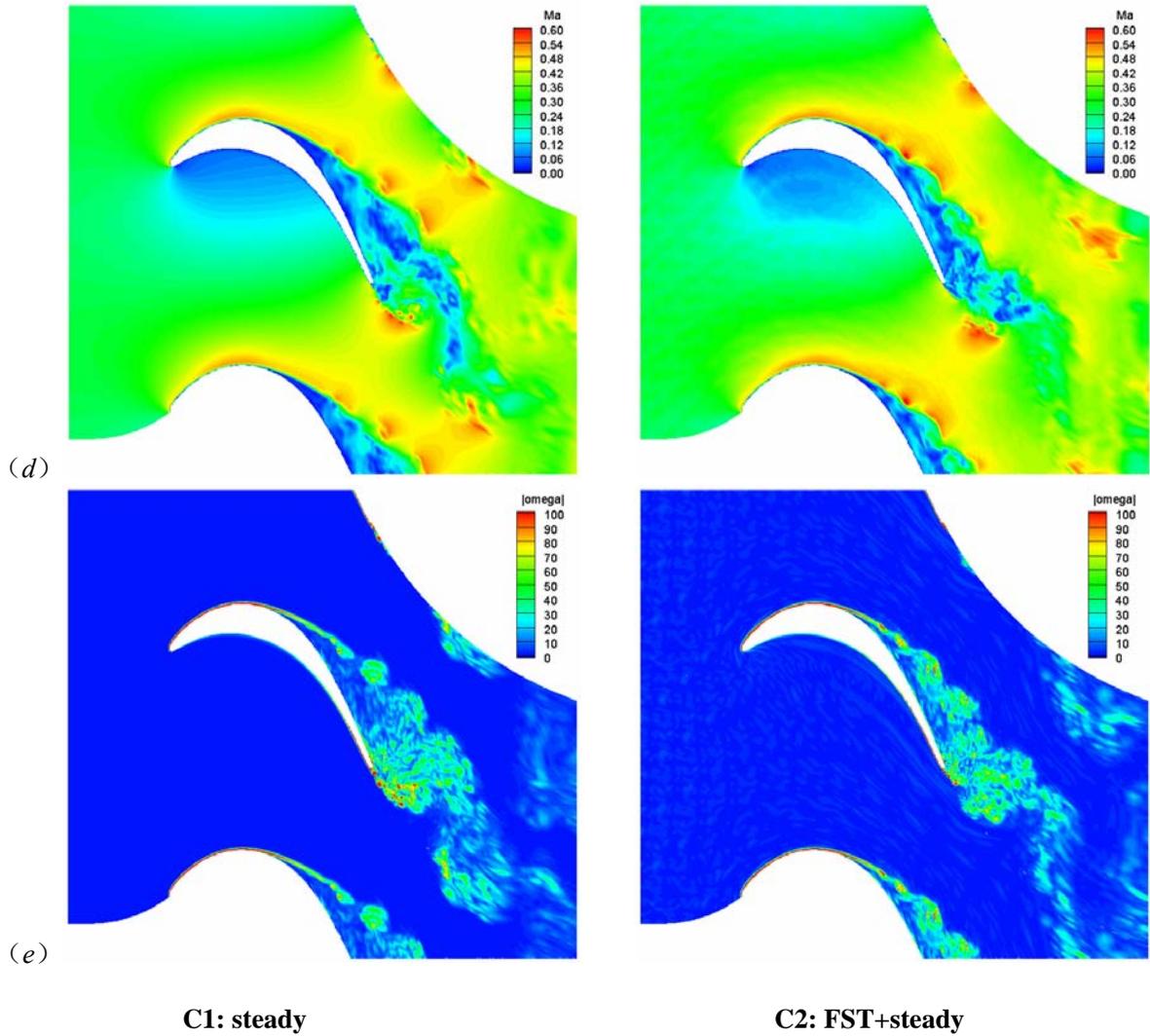
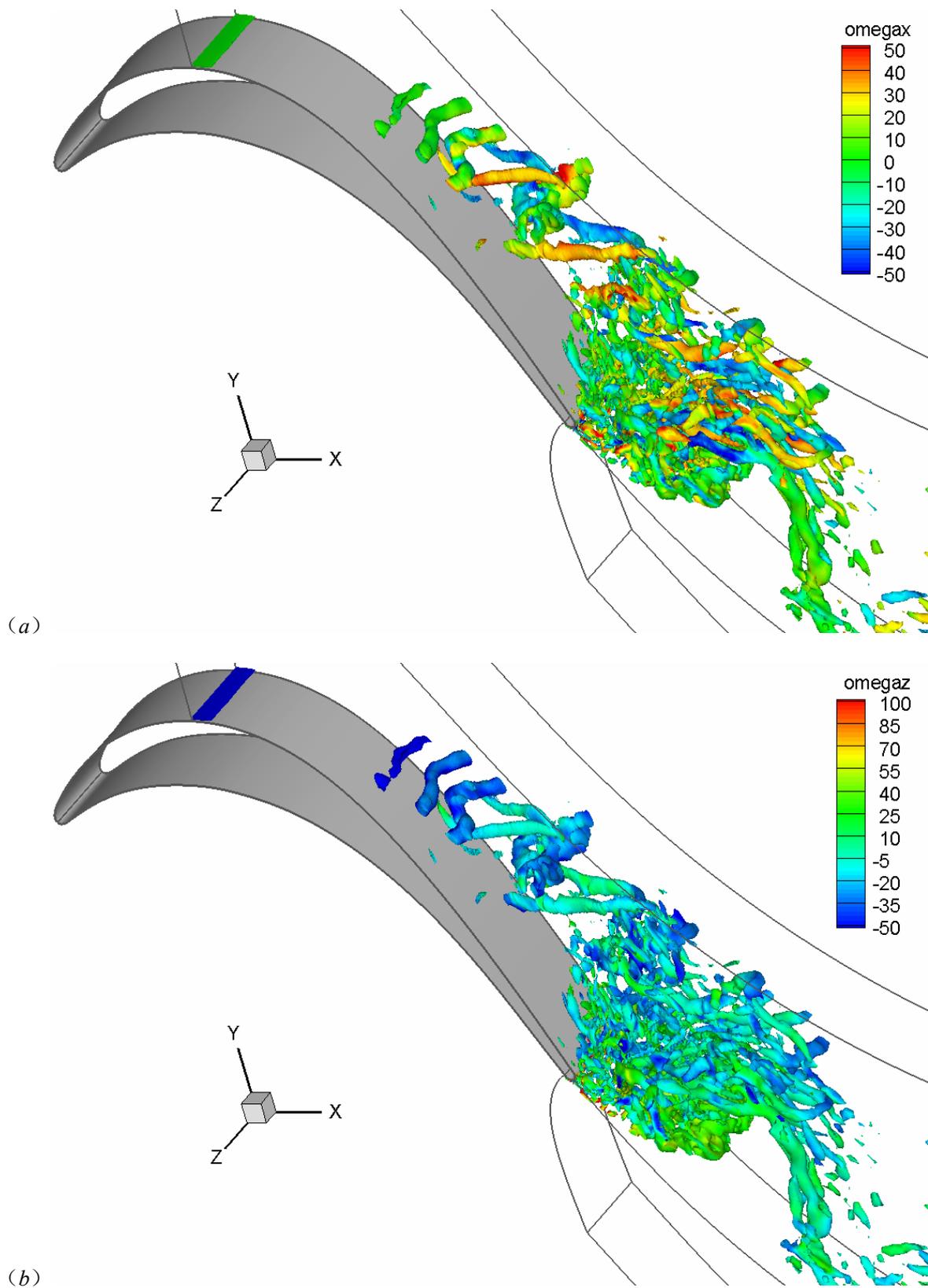


图 78 展向某一截面的瞬态流动图画，C1: $t = 48.960$ 时刻，C2: $t = 39.552$ 时刻 (a) 速度分量 u 的云图；(b) 速度分量 v 的云图；(c) 温度云图；(d) 马赫数云图；(e) 涡量模云图

图 79 给出了与图 78 同一时刻叶片吸力面分离区及尾迹区瞬态流场中的大尺度相干结构，这里采用 Q 法则进行旋涡识别，C1 取 $Q = 200$ 的等值面，C2 取 $Q = 250$ 的等值面，且等值面分别用涡量 ω_x 、 ω_z 进行着色。观察算例 C1 的图画可以发现，从分离点朝向下流，首先可以看到自由剪切层卷起的展向涡，展向涡向下游输运时发生扭曲，出现沿展向的波动，而后在展向涡之间，产生成对的反向旋转的流向涡，流向涡一直到尾迹区还清晰可见，此时展向涡早已消失，在流场的尾迹区，也可以清楚看到交替脱落的大尺度结构。再来观察 C2 的图画，从分离点朝向下流，展向涡很快卷起，由于受到背景湍流度的作用，其等值面极不光滑，且展向涡存在的时间比 C1 的更短，此外，相邻展向涡之间的流向涡结构也不如 C1 的清晰，整个流场的涡结构都显得较为混乱，且其平均尺寸比 C1 要小一些。图 78 所取的展向截面正是图 79 中接近计算域正中的截面，两相比

较，前者的云图很容易和后者流场结构对应起来，这在图 78 的涡量模及温度云图中表现的最为明显。



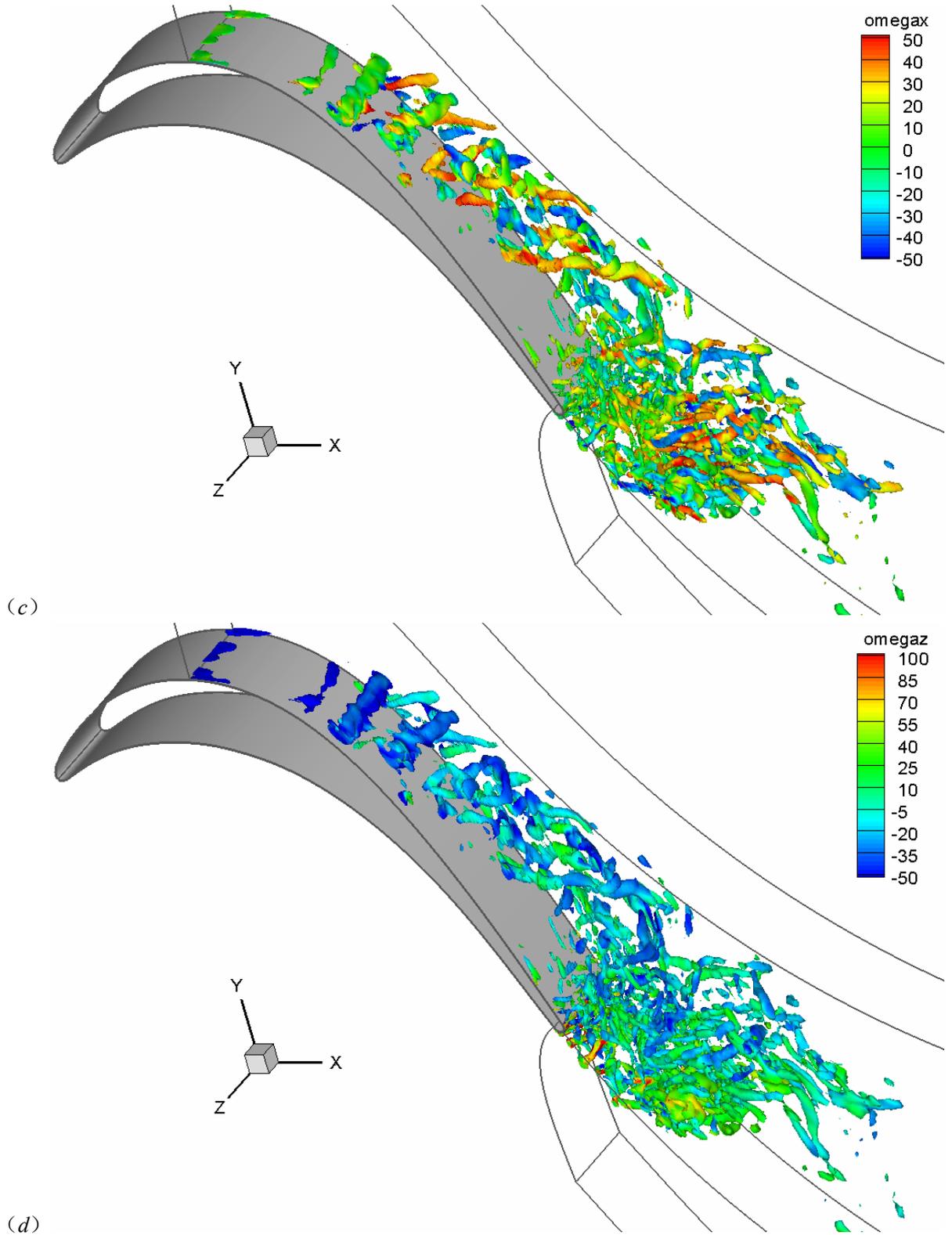
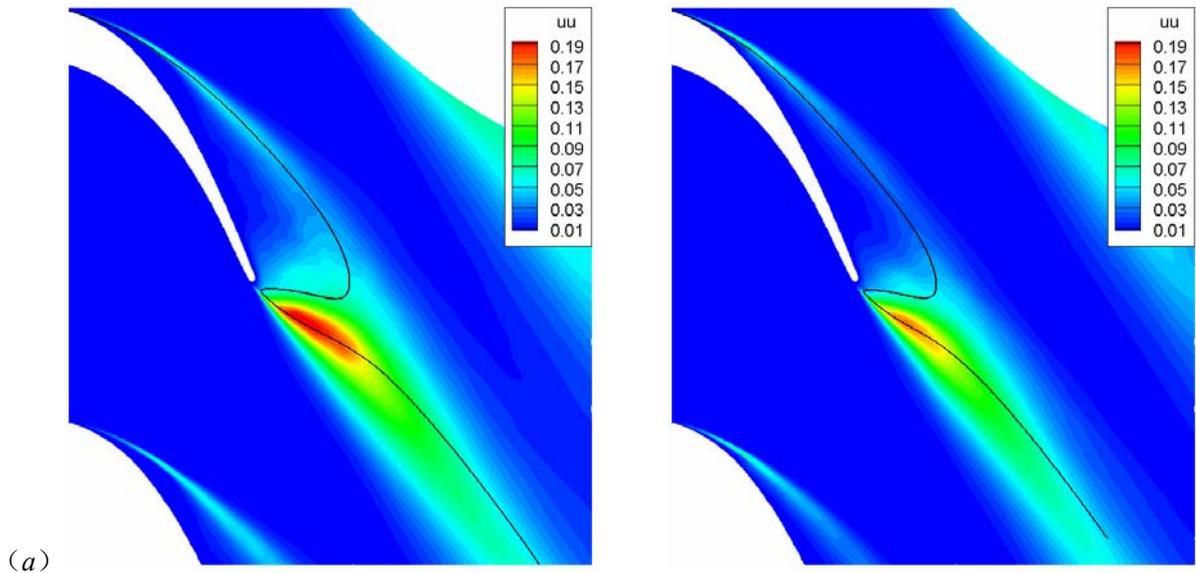
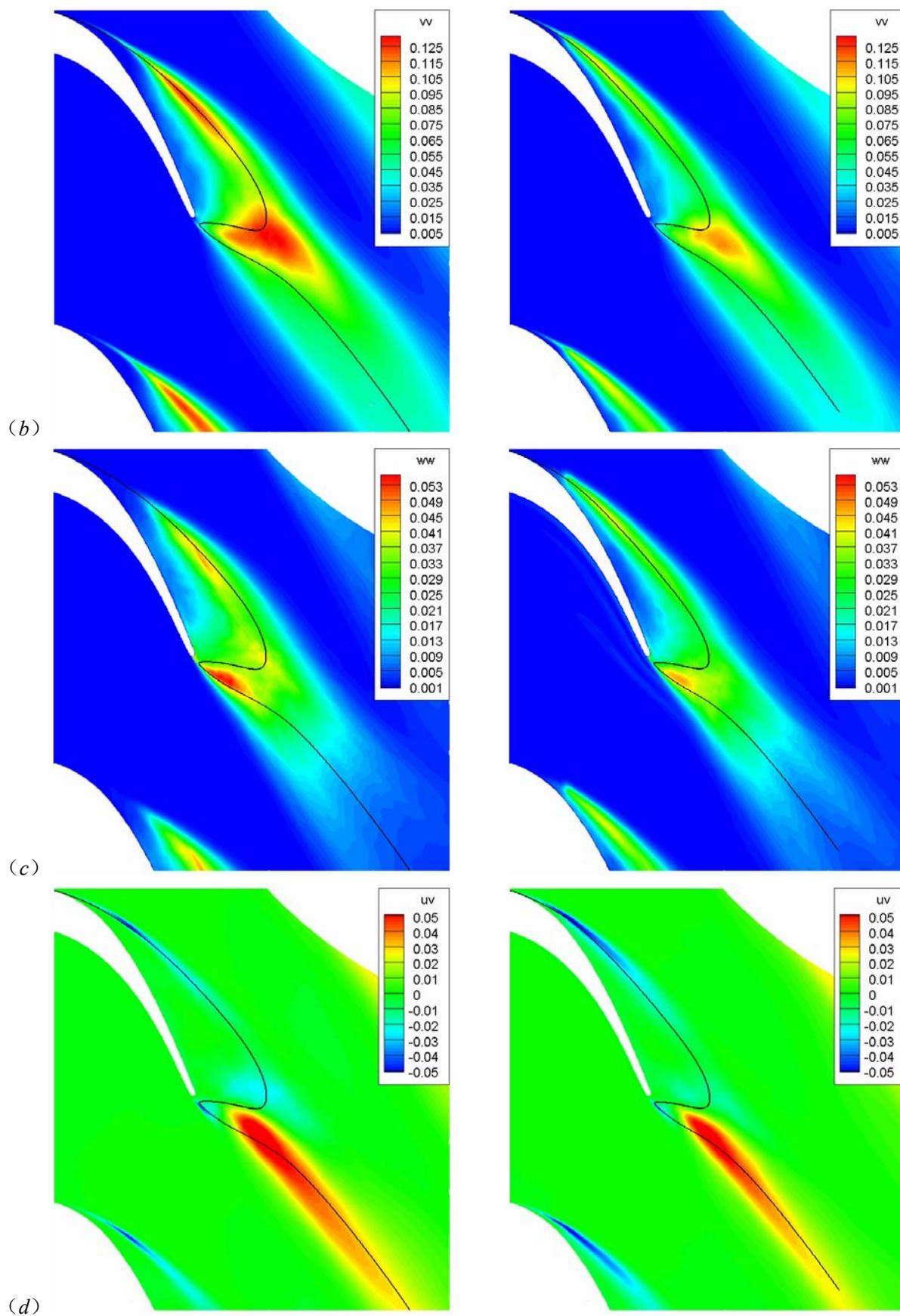


图 79 叶片吸力面分离区及尾迹区瞬态流场中的大尺度相干结构，采用 Q 法则进行旋涡识别，C1: $t = 48.960$ 时刻， $Q = 200$ 等值面，C2: $t = 39.552$ 时刻， $Q = 250$ 等值面 (a) C1，采用 ω_x 着色；(b) C1，采用 ω_z 着色；(c) C2，采用 ω_x 着色；(d) C2，采用 ω_z 着色

5.4.3 高阶统计量

图 80 给出了算例 C1、C2 二阶统计量的对比，其中 (a) ~ (e) 分别为雷诺应力 $\overline{u'u'}$ 、 $\overline{v'v'}$ 、 $\overline{w'w'}$ 、 $\overline{u'v'}$ 和湍动能 $k = (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})/2$ ，为了便于比较，C1、C2 对应云图中统计量的取值范围保持一致，图中所示流线与图 73 (d) 中的流线相同，非常接近时均分离泡的分界流线 (dividing streamline)。对比两个算例的云图可以发现，首先，所有统计量的云图在形态上都具有一定的相似性，但 C2 的取值比 C1 要小一些，如 C2 中 $\overline{u'u'}$ 、 $\overline{v'v'}$ 、 $\overline{w'w'}$ 、 k 的最大值都比 C1 的最大值小，C2 中 $\overline{u'v'}$ 的取值范围也比 C1 的小，从上文对图 79 的分析可知，C2 流场中的涡结构较 C1 显得更为混乱，且其平均尺寸比 C1 要小一些，也就是说，C1 流场中涡结构的尺度比 C2 大，大的结构意味着大的脉动，由此导致 C1 的二阶统计量比 C2 大。其次，由图 73 (d) 可知，在分离区的前半部分，离开壁面的涡层与分界流线具有相同的走向，而在二阶统计量的云图中，沿着分界流线，也存在一个统计量数值较大 (对于 $\overline{u'v'}$ 是其绝对值较大) 的细长带条，但两个算例中该带条出现的位置、宽度等都存在差异，其在 C2 中出现的位置均比 C1 中的更靠近分离点，分析原因，C2 由于存在背景湍流度，分离的自由剪切层发展较快，较 C1 提前出现波状摆动，提前卷起展向涡，也就是说，同等量级的速度脉动，C2 出现的位置比 C1 靠前，由此带条出现的位置也更靠前。





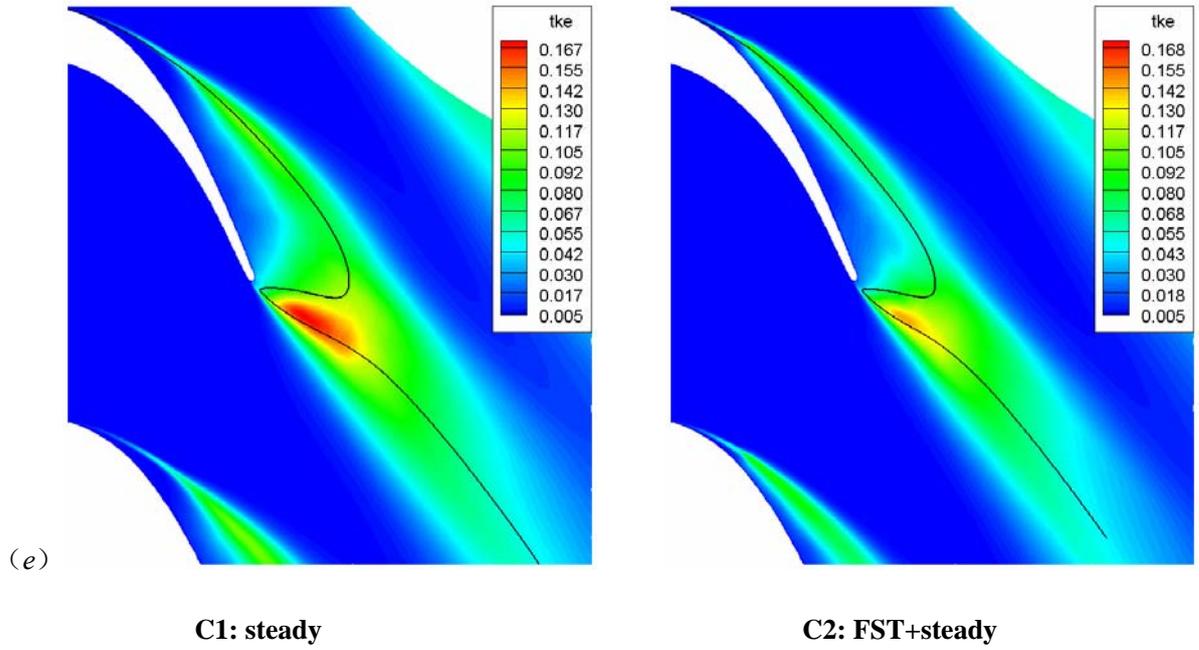


图 80 二阶统计量的对比 (a) 雷诺应力 $\overline{u'u'}$; (b) 雷诺应力 $\overline{v'v'}$; (c) 雷诺应力 $\overline{w'w'}$; (d) 雷诺应力 $\overline{u'v'}$; (e) 湍动能 $(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})/2$

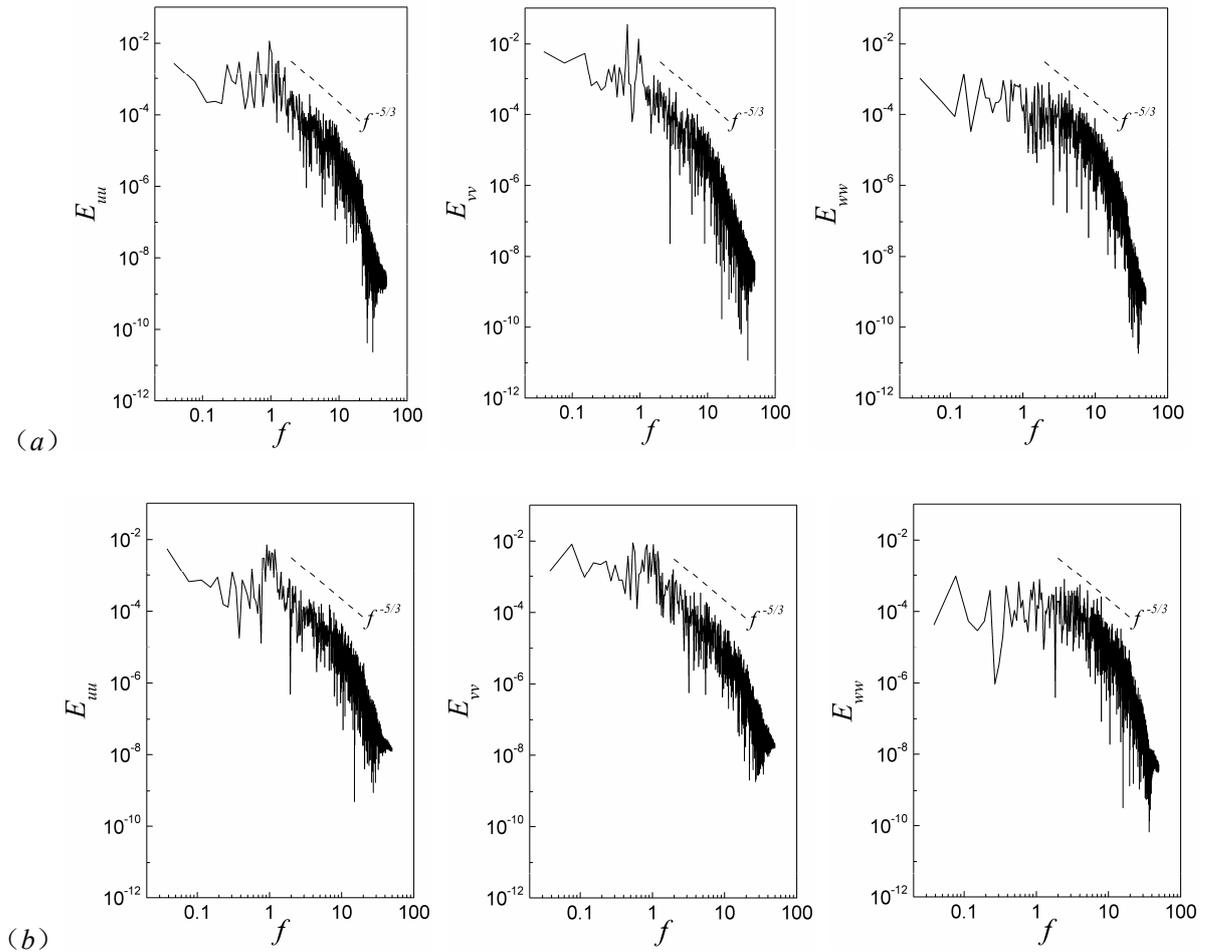
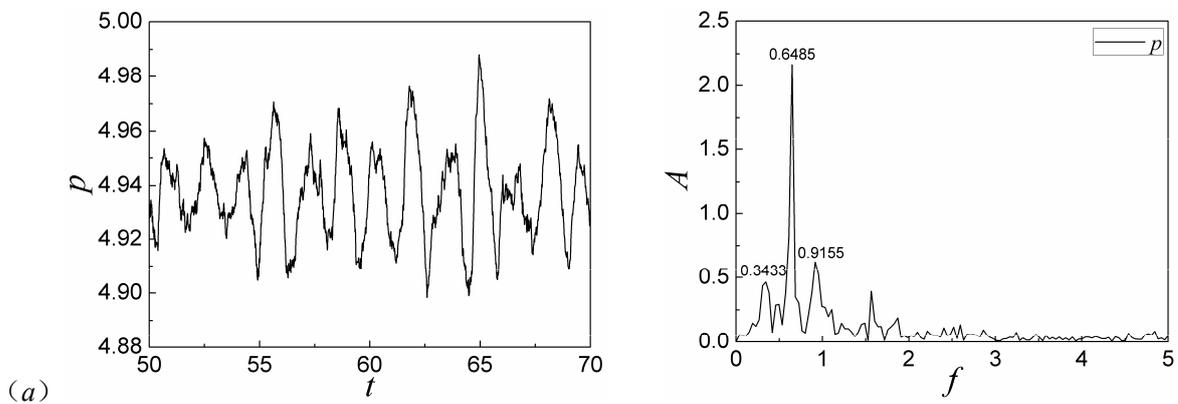


图 81 尾迹区雷诺应力 $\overline{v'v'}$ 取最大值位置的能谱 (a) 算例 C1; (b) 算例 C2

图 81 给出的是图 80 (b) 中雷诺应力 $\overline{v'v'}$ 取最大值位置的能谱 (即图 73 (d) 中的 P7 点), 图 (a) 对应 C1, 图 (b) 对应 C2, 左中右三幅图分别是 E_{uu} 、 E_{vv} 和 E_{ww} , 由于监测 P7 点得到的是一个时间序列, 所以图中横坐标为无量纲的频率 f 。无论对于 C1 或者 C2, 能谱均存在满足 $-5/3$ 幂次率的惯性子区, 这表明计算网格具有足够的分辨率, 也从一个侧面反映了计算结果的可靠性。

5.4.4 叶片的近前缘流动

为了进一步认识背景湍流对叶栅流动的影响, 本部分对算例 C1、C2 近前缘的流动进行了分析。在叶栅前缘附近, 计算中设置了一些监测点, 如图 73 (b) 所示, 监测点 B 位于叶片前缘滞止点附近, 点 A 与点 B 在同一条流线上, 位于叶栅入口测量平面, 点 C 则处于吸力面 τ_{wall} 曲线的第一个极小值点附近 (见图 74 (a), 壁面第一层网格点)。图 82 给出了算例 C1 监测点 B 不同流场变量的时间序列及其频谱, 对于图 (a) 和 (b) 中的压力 p 以及速度分量 u 、 v , 时间序列存在明显的周期性脉动, 它们的峰值频率 $f = 0.6485$, 这和图 71 (a) 中叶片所受压力合力的峰值频率是一致的, 前已述及, 压力合力的周期性变化来源于叶片尾缘吸力面/压力面大尺度结构的交替脱落, 事实上, 对于亚音流动, 尾缘旋涡交替脱落引起的压力扰动会向流场的上游传播, 由此点 B 的压力 p 出现周期性脉动, 受 p 的影响, 其他物理量如 u 、 v 等也出现了周期性的脉动。对于图 (d) 中的速度分量 w , 情况则完全不同, 由于计算域入口没有加入背景湍流, w 脉动的量级很小, 从频谱分布可以看到, $f < 10$ 部分其幅值近似为 0, 只是在更高的频率存在宽频脉动, 这些高频脉动可能来源于程序的各种数值误差、边界的数值反射等, 是数值而非物理的。图 (d) 中还给出了监测点 C 的频谱, 与点 B 比较, 二者非常类似, 这表明: 对于算例 C1, 整个叶栅前缘附近的流动都处于二维状态, 压力扰动对该区域的速度分量 w 几乎没有影响。



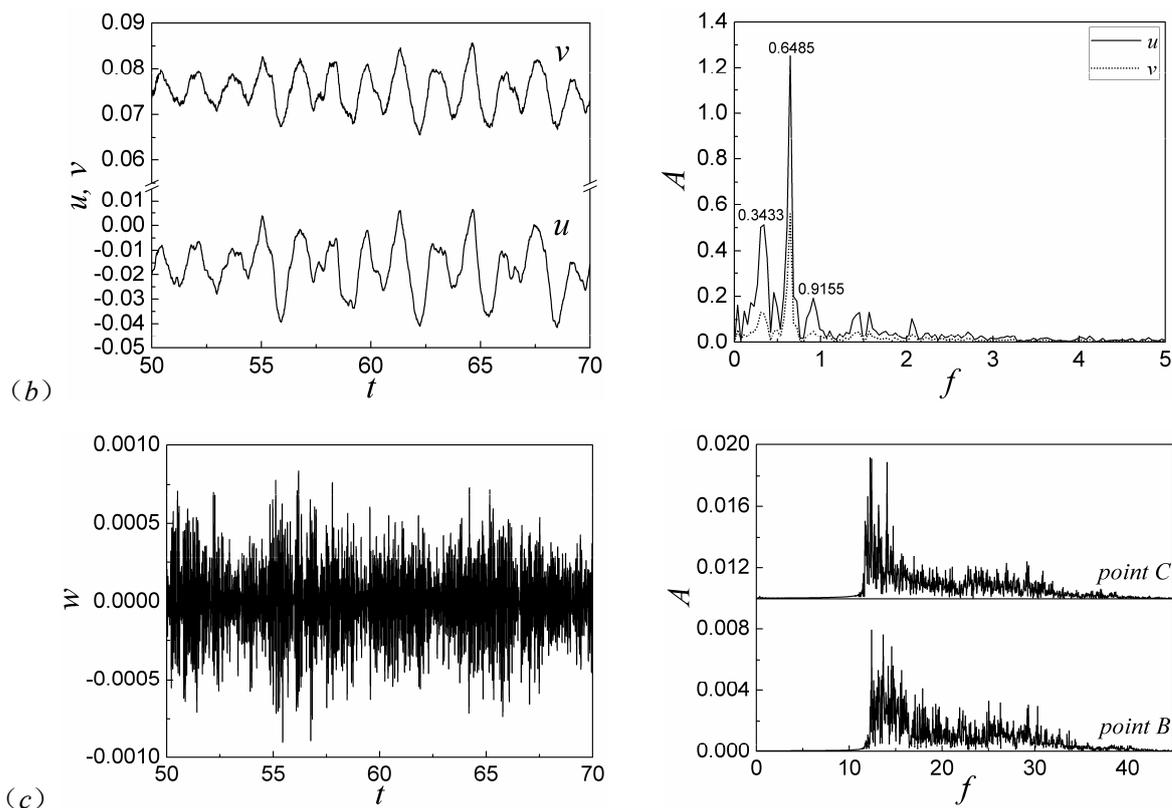


图 82 算例 C1 监测点 B 不同流场变量的时间序列及频谱 (a) 压力 p ; (b) 速度分量 u 、 v ; (c) 速度分量 w

图 83 给出了算例 C2 中不同流场变量在监测点 A、B、C 的频谱对比，其中图 (a) ~ (c) 分别对应压力 p 、速度分量 u 以及 w 。对于监测点 A， u 和 w 的频谱中都出现了 4 个明显的高频信号，这些信号在压力 p 的频谱中也有所体现（虽然其幅值相对较小），从 5.3.1.3 可知，在计算域入口加入背景湍流度时，对各向同性湍流场的“扫描”会在扰动场中引入周期性，其频率 f_{Tu} 计算如下：

$$f_{Tu} = \frac{1}{T_{Tu}} = \frac{1}{L_{iso}/U_{in}} = \frac{U_{in}}{L_{iso}} \quad (5.39)$$

从 5.3.1 可知， $U_{in} = 0.77540450921909$ ， $L_{iso} = l_z = 0.2$ ，于是 $f_{Tu} = 3.877$ ，这和图中的 $f = 3.891$ 非常接近，其他 3 个高频分量显然是这一基频信号的高次谐频，关于谐频产生的原因，目前还不清楚，可能是由于 U_{in} 较实际的叶栅进口速度偏大，导致对背景扰动的压缩，由此在 L_{iso} 的尺度内形成了某种高频的振荡。除了监测点 A，点 B 和点 C 的频谱中也存在类似的高频分量，显然，分析频谱图时，必须剔除这些非物理的谐频信号。观察图 (a) 和图 (b) 发现，对于压力 p 和速度分量 u ，同算例 C1 一样，叶片尾缘旋涡交替脱落引起的压力扰动会向上游传播，导致点 A、B、C 的流场变量也出现周期性扰动，

形成图中低频部分的峰值。对于图 (c)，由于在计算域入口就加入了 w 分量的扰动，其频谱与C1 中对应点的频谱 (图 82 (c)) 存在很大差别，在监测点B，低频部分幅值很大，这表明：存在背景湍流度的条件下，下游压力扰动对前缘附近区域的速度分量 w 会产生显著影响。

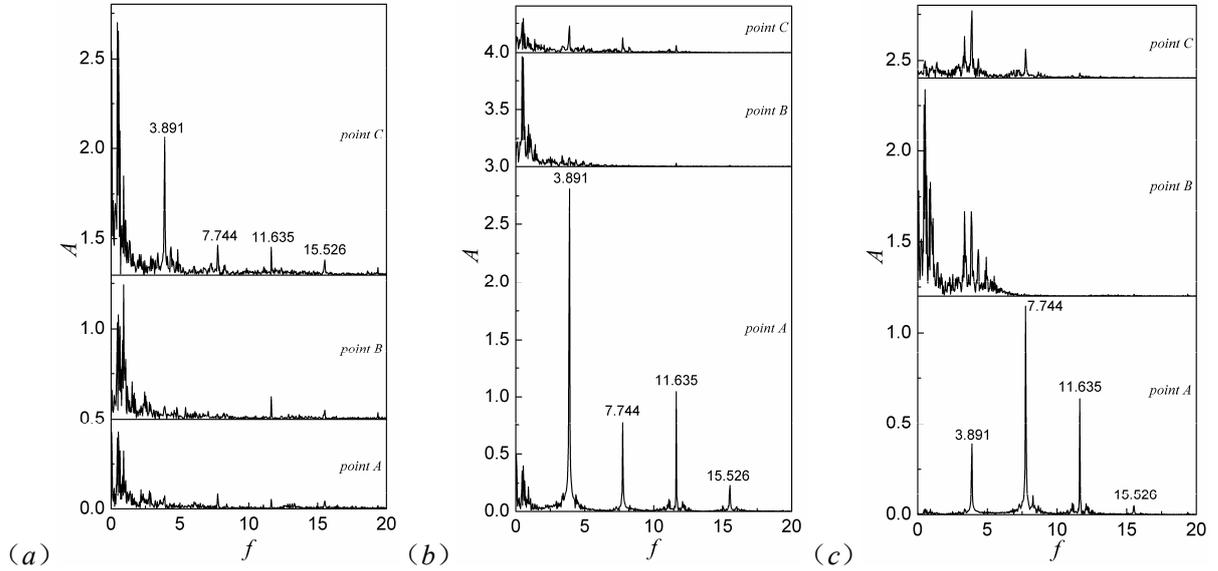


图 83 算例 C2 中不同流场变量在监测点 A、B、C 的频谱对比 (a) 压力 p ；(b) 速度分量 u ；(c) 速度分量 w

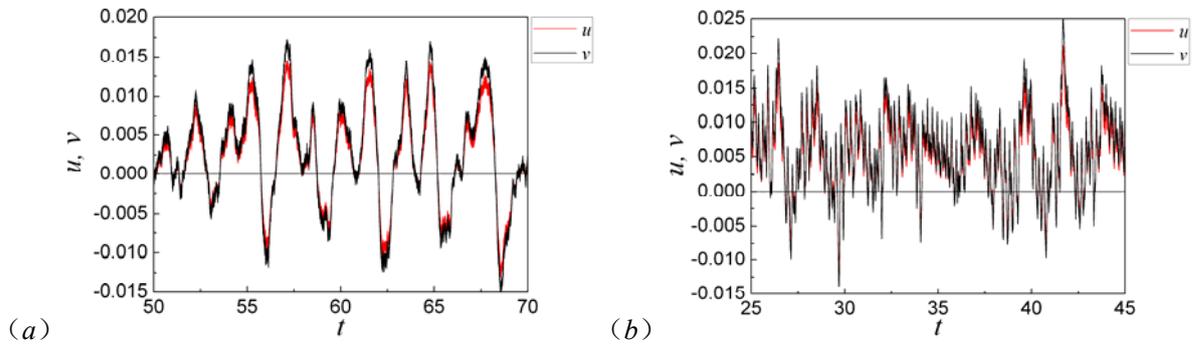


图 84 监测点 C 速度分量 u 、 v 的时间序列 (a) 算例 C1；(b) 算例 C2

图 84 给出了算例C1、C2 在监测点C速度分量 u 、 v 的时间序列，两幅图画都有一个共同的特点：即 u 、 v 的曲线几乎重合在一起，考虑到点C位于壁面第一层网格点上，则瞬态速度矢量方向通常与壁面平行，该处壁面恰好与 x 方向近似成 45° 夹角，于是两速度分量几乎相等，它们取正值时， τ_{wall} 为正，取负时 τ_{wall} 也为负。对于C1， u 、 v 曲线存在大尺度的脉动，前已述及，这是由尾缘旋涡交替脱落引起的，算例C2 的曲线也存在类似的脉动，但大尺度脉动上还叠加了明显的高频脉动，其频率等于上文提到的基频 $f = 3.891$ ，来源于计算域入口背景扰动的周期性。C1、C2 的曲线中，都存在 u 、 v 取

负值的时间段，这表明C点附近的边界层间歇性分离，在背景湍流度作用下，间歇因子减小，因此C1时均的壁面剪切应力小于C2。

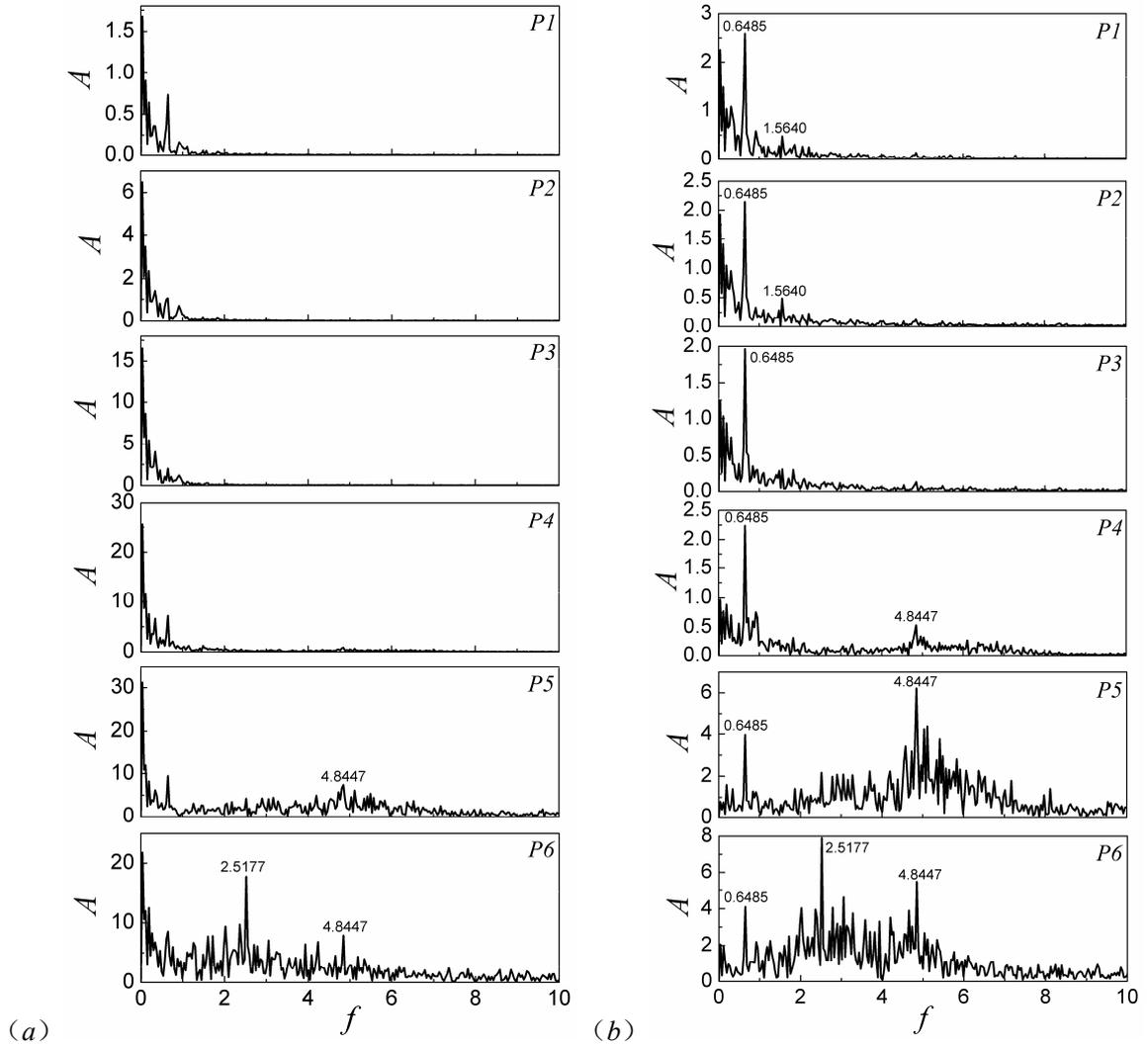
5.4.5 吸力面分离流动机理

对于算例C1和C2，虽然它们的吸力面都出现了大尺度分离，但由于C2中背景湍流度的存在，二者的分离图画并不完全相同，为了较为深入的认识和理解吸力面分离流动机理，本部分只针对算例C1进行分析，而有关背景湍流度的效应则在下一个部分考虑。如图73(d)所示，在时均流场中，沿着吸力面的边界层和分离的自由剪切层，布置了6个监测点P1~P6，其中P2位于时均分离点的边界层内，P1则在P2上游的附着边界层中，P3~P6沿着分离的涡层从前到后排列，都近似处于涡层的中心。图85给出了算例C1中不同流场变量在监测点P1-P6的频谱，其中图(a)和(b)对应速度分量 v 和压力 p ，图(c)和(d)均对应速度分量 w ，唯一的差别在于前者的频率范围较宽。从5.4.2对C1瞬态流动图画的描述可知，吸力面的涡层离开壁面以后，由于自由剪切层的K-H不稳定性，涡层中的扰动被迅速放大，连续涡层逐渐失稳，首先出现波状的上下摆动，而后卷起展向的大尺度旋涡，显然，这一过程应该在监测点的频谱图上有所体现。对于速度分量 v ，P1点存在峰值频率 $f = 0.6485$ ，这是尾缘旋涡的脱落频率，P2~P4点的图中，也是该频率较为明显，且幅值不断增加；到了P5点，出现另一峰值频率 $f = 4.8447$ ，而在P6点，又增加了一峰值 $f = 2.5177$ 。对于压力 p ，存在类似的情况，除了尾缘旋涡脱落频率外，P4点即出现 $f = 4.8447$ ，到了P6点， $f = 2.5177$ 的幅值增加到最大。结合瞬态流动图画，可以确定 $f = 4.8447$ 即是卷起展向涡的频率， $f = 2.5177$ 接近其1/2，说明展向涡在向下游输运的过程中可能存在配对现象(pairing process)^[350]。对于速度分量 w ，P1、P2点的频谱与前缘监测点B、C的类似(图82(c))，多数是非物理的高频脉动，到了P3点，情况发生变化，低频扰动幅值迅速增大，高频脉动几乎被淹没，此后的P4~P6点，低频部分幅值继续增加，P5点出现峰值频率 $f = 4.9591$ ，与 v 和 p 的 $f = 4.8447$ 存在一些差异，而到了P6点， w 发展成宽频扰动，存在多个峰值。由此可以看出，直到接近时均分离点P2， w 还只是包含非物理的高频脉动，也就是说，流动的三维性是在分离的剪切层中逐渐发展起来的。

对于分离的剪切层，增长最快的不稳定频率(即卷起展向涡的频率)通常和平面自由剪切层的不稳定频率一致，前者可以用分离点的Strouhal数 Sr_{θ_s} 表征，其定义如下^[233]：

$$Sr_{\theta_s} = f^* \theta_s^* / U_{es}^* = f^* (L_r^* \theta_s) / (U_{es} U_r^*) = f^* L_r^* / U_r^* \theta_s / U_{es} = f \theta_s / U_{es} \quad (5.40)$$

算例C1 中, 已知 $f = 4.8447$, 时均分离点的动量厚度 $\theta_s = 0.0023459$, 该点边界层外缘的流速 $U_{es} = 1.1915$, 于是 $Sr_{\theta_s} = 0.00954$ 。文献 [233]收集了一系列实验及数值模拟得到的 Sr_{θ_s} 数值, 如表 14 所示, 从表中可以看出, C1 的计算值与其他研究者的结果保持一致。



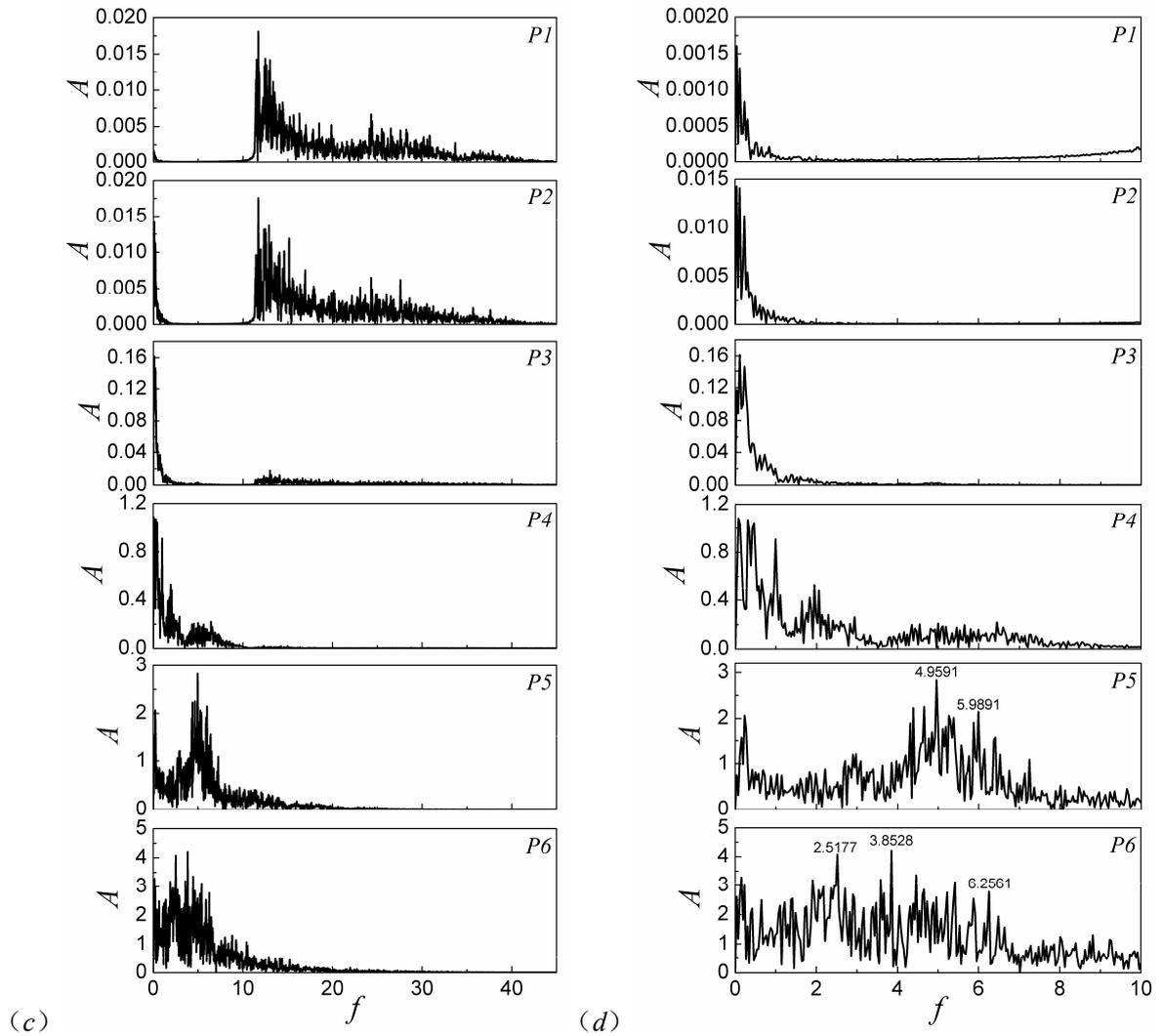


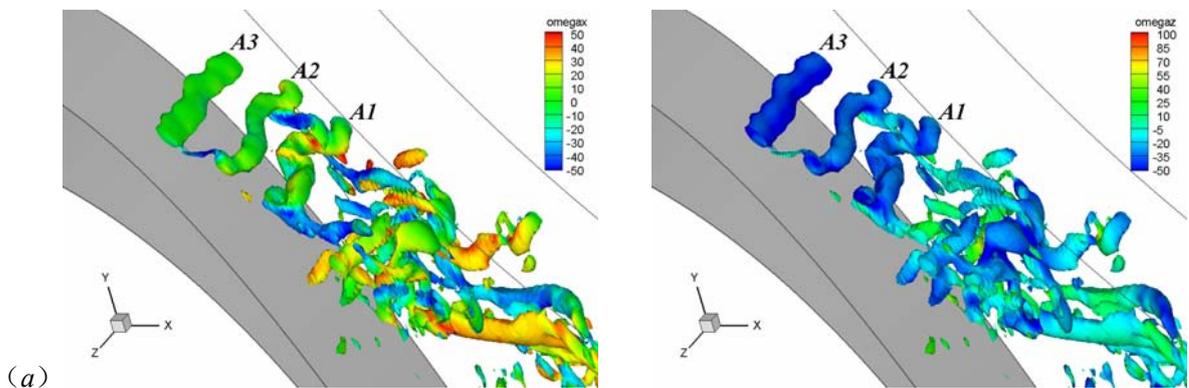
图 85 算例 C1 中不同流场变量在监测点 P1-P6 的频谱对比 (a) 速度分量 v ; (b) 压力 p ; (c) 速度分量 w , 宽的频率范围; (d) 速度分量 w

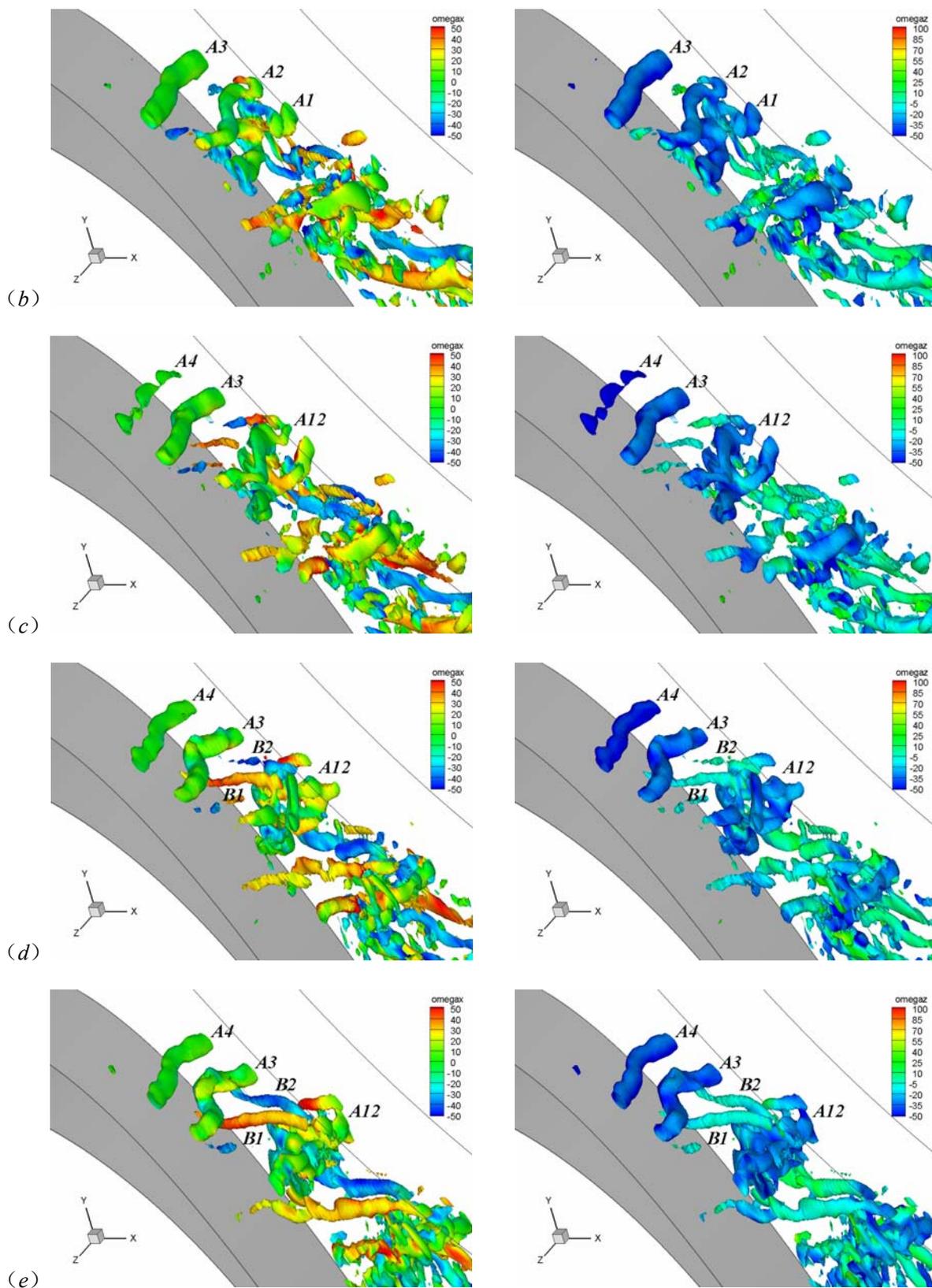
表 14 不同实验/数值模拟得到的 Sr_{θ_s} 数值^[233]

Investigators	$Sr_{\theta_s} = f \theta_s / U_{es}$
McAuliffe & Yaras [233]	0.011
McAuliffe & Yaras	0.008-0.016
Pauley et al.	0.005-0.008
Yang & Voke	0.005-0.011
Talan & Hourmouziadis	0.010-0.014
Ho & Huerre (free-shear layer, Sr_{θ})	0.016

图 86 给出了算例C1 吸力面分离区大尺度相干结构的时间演化序列, 左边和右边图画
的等值面分别用涡量 ω_x 、 ω_z 着色, 图中对典型的涡结构进行了标记, 字母A开头的代表展

向涡，字母B开头的则代表流向涡，从这个时间序列可以清晰看到分离区涡系的演化过程。首先观察图中的展向涡，前已述及，边界层离开壁面，形成二维的自由涡层，涡层失稳后卷起展向涡，由于二维扰动波的最快增长频率 $f_0 = 4.8447$ ，展向涡的卷起频率必然与之相等，卷起的展向涡在平均流作用下向下游输运，由此形成了图(a)中A1-A2-A3、图(f)中A3-A4-A5的离散涡列。由于自由涡层的二维性，初始的展向涡也保持二维状态，但在向下游输运的过程中， w 的扰动迅速增长，展向涡发生扭曲，出现沿 z 向的波动；又由于平均流速度梯度的存在，展向涡通常在自诱导作用下演化出 Λ 型的结构，比如图中的A3，图(a)时基本保持二维状态，到图(f)时已经发展成 Λ 涡。图中还可以观察到另外一个重要现象，即展向涡的配对，比如，图(a)的A1、A2虽然出现了扭曲，但还是两个相对独立的旋涡，到图(b)时二者开始相互缠绕，图(c)中A1、A2已经合并成一个旋涡A12，此外，图中也可以看到A3、A4合并成A34的过程。展向涡列向下游输运的过程中，由于非线性作用，频率为 $f_0/2$ 的次谐波开始出现和增长，正是次谐波的迅速增长导致相邻的展向涡缠绕在一起，最终合并为一个旋涡，完成配对过程，显然，图85(a)(b)中出现的 $f = 2.5177$ 即是次谐波的频率。接下来观察图中的流向涡，图(d)到图(f)给出了流向涡对B1、B2形成和演化的过程，实际上，在图(c)中，展向涡A12和A3之间已经出现流向涡对的痕迹，到了图(d)，B1、B2已变得非常明显，此后随着A12与A3间距的增加，涡对的尺度也不断增大。关于流向涡对的形成，可以解释如下^[350]：在相邻的展向涡之间，存在着一个鞍点，沿着通过鞍点的流线，分别存在强的拉伸和压缩，由于三维扰动的存在，沿拉伸方向的旋涡分量得以加强，由此形成反向旋转的流向涡对，在向下游输运的过程中，持续的拉伸作用使得涡对的尺度不断增加。相比展向涡，流向涡对在流场中存在的时间很长，其重要作用在于增强自由剪切层内外区的掺混，正是因为流向涡对不断的将高动量流体输运到近壁，低动量流体输运到外区，由此才导致了分离边界层的再附。





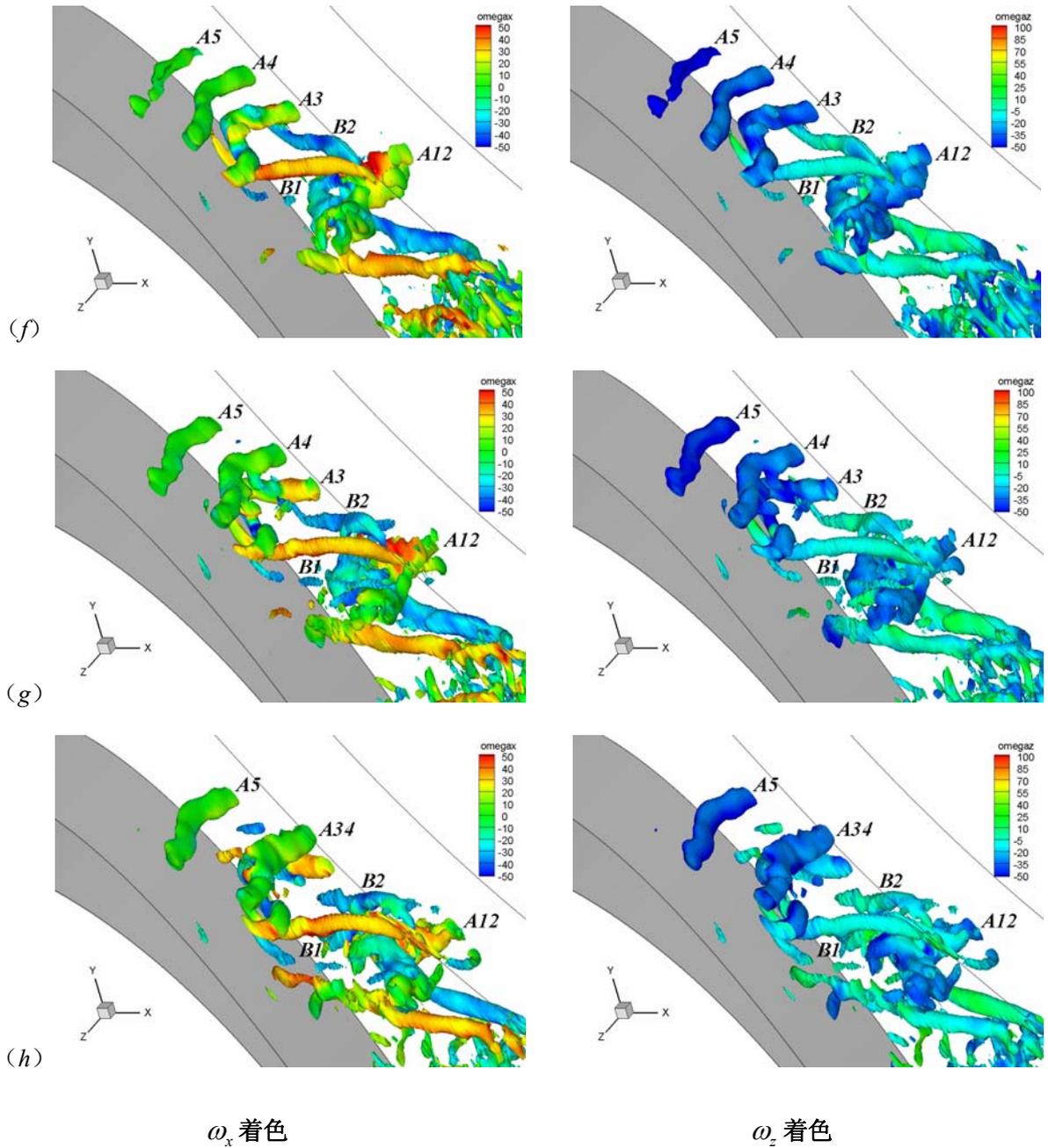
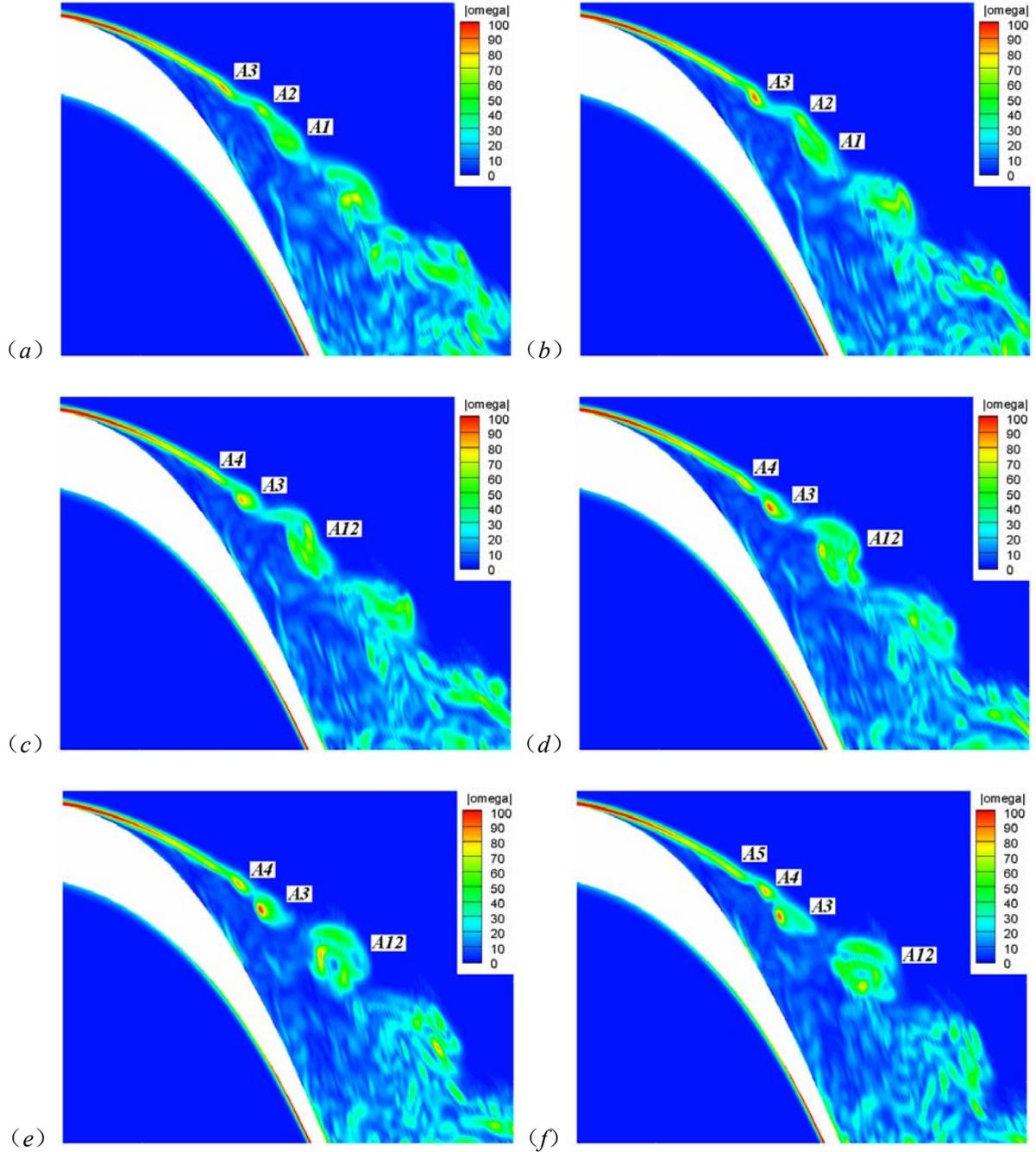


图 86 算例 C1 吸力面分离区大尺度相干结构的时间演化序列, 采用 Q 法则进行旋涡识别, $Q = 200$ 等值面 (a) $t = 48.640$; (b) $t = 48.704$; (c) $t = 48.768$; (d) $t = 48.832$; (e) $t = 48.896$; (f) $t = 48.960$; (g) $t = 49.024$; (h) $t = 49.088$

图 87 给出了与图 86 对应时刻、算例 C1 中接近展向正中截面涡量模云图的时间演化序列, 为了与后者对应, 图中对展向涡进行了标记, 由于流向涡对恰好不通过中间截面, 因此整个时间序列中几乎看不到它们的痕迹。观察图画, 首先可以对展向涡的卷起过程有更深刻的认识: 吸力面层流边界层在逆压梯度作用下离开壁面, 形成二维的自由涡层, 由于 K-H 不稳定性, 二维扰动波以最快增长频率 $f = 4.8447$ 迅速发展, 涡层失稳, 出现

波状摆动，而后卷起二维的展向涡。其次，从图中也可以看到展向涡的配对过程，比如 A1、A2，由于 A1 出现较早，尺度较大，配对过程中 A2 被 A1 卷吸/合并，而后形成 A12，A12 向下游输运，尺度不断变大；A3、A4 配对形成 A34 时，也可以看到类似的现象。



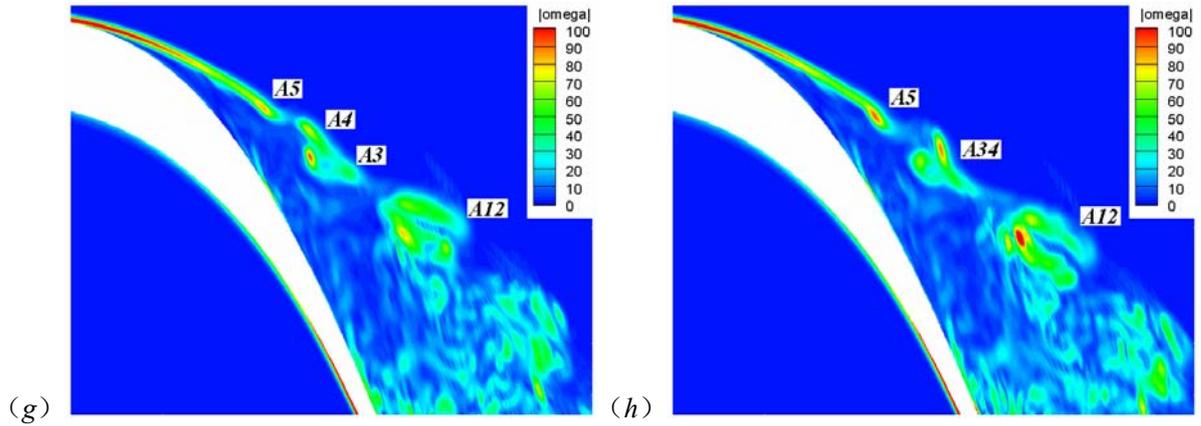


图 87 算例 C1 展向某一截面的时间演化序列，涡量模云图 (a) $t = 48.640$; (b) $t = 48.704$; (c) $t = 48.768$; (d) $t = 48.832$; (e) $t = 48.896$; (f) $t = 48.960$; (g) $t = 49.024$; (h) $t = 49.088$

5.4.6 背景湍流度对吸力面分离流动的影响

上一部分对算例C1 吸力面分离流动的机理进行了研究，本部分则主要针对算例C2 的内容进行分析，在此基础上，通过与C1 结果的对比，研究背景湍流度对吸力面分离流动的影响。同C1 类似，在C2 的时均流场中，沿着吸力面的边界层和分离的自由剪切层，布置了 6 个监测点P1~P6，如图 73 (d) 所示，其中P2 位于时均分离点的边界层内，P1 则在P2 上游的附着边界层中，P3~P6 沿着分离的涡层从前到后排列，都近似处于涡层的中心。图 88 给出了算例C2 中不同流场变量在监测点P1-P6 的频谱，其中图(a)~(c) 分别对应速度分量 v 、压力 p 和速度分量 w 。从 5.4.4 对叶片近前缘流动的分析可知，由于背景湍流度生成方法的缺陷，流场中出现频率 $f = 3.891$ 的扰动及其高次谐频，从图 (b) 和图 (c) 可以看到，即使在分离剪切层中，这种扰动仍然非常明显，分析频谱时首先需要将它们剔除。对于速度分量 v ，P1~P3 点存在一个明显的低频峰值，这和尾缘旋涡的脱落频率对应，从P4 开始，频谱发展成宽频扰动，缺少明显的峰值，虽然吸力面的分离涡层也会卷起展向大涡，但单从 v 的频谱却难以确定其卷起频率；类似的情形也在压力 p 的频谱中出现，P4 点开始形成的宽频扰动虽然存在多个峰值，却无法据此确定卷起频率。对于速度分量 w ，P1~P3 点同样存在和尾缘旋涡脱落频率对应的低频峰值，高频分量虽然幅值很小，但在P1 点就已经存在，这表明在分离点以前的附着边界层中， w 的扰动已经较为显著，从该点朝向下流，扰动幅值不断增加，P3 点已经形成较为明显的宽频扰动，到P4 点其幅值继续增加，点P5、P6 的频谱和P4 相比不存在太大差别。结合对瞬态流动图画的分析，最后可以将展向涡的卷起频率确定为 $f = 8.3923$ ，这在P4 点 v 、 p 的频谱中均有所体现，同C1 的 $f = 4.8447$ 相比，C2 的卷

起频率几乎提高了一倍，但是，频谱图中似乎找不到接近 $f/2$ 的峰值，这表明次谐波可能并没有发展起来。比较C2和C1对应流场变量的频谱，可以发现二者存在如下差异：首先，分离剪切层中扰动的增长速度，C2明显快于C1，对于速度分量 v ，C2在P4点即已成为宽频扰动，C1则在P5点才较为明显，类似的情况在压力 p 的频谱中同样存在；其次，对于速度分量 w ，C2中背景湍流度的效应使得在时均分离之前的P1点，边界层中已经存在明显的 w 扰动，但在C1中，直到分离以后的P3点， w 扰动才较为明显；第三，C1中对应展向涡脱落以及次谐波发展的峰值频率非常明显，但在C2中，展向涡的脱落频率却不易识别，次谐波更是难以从图中找到。

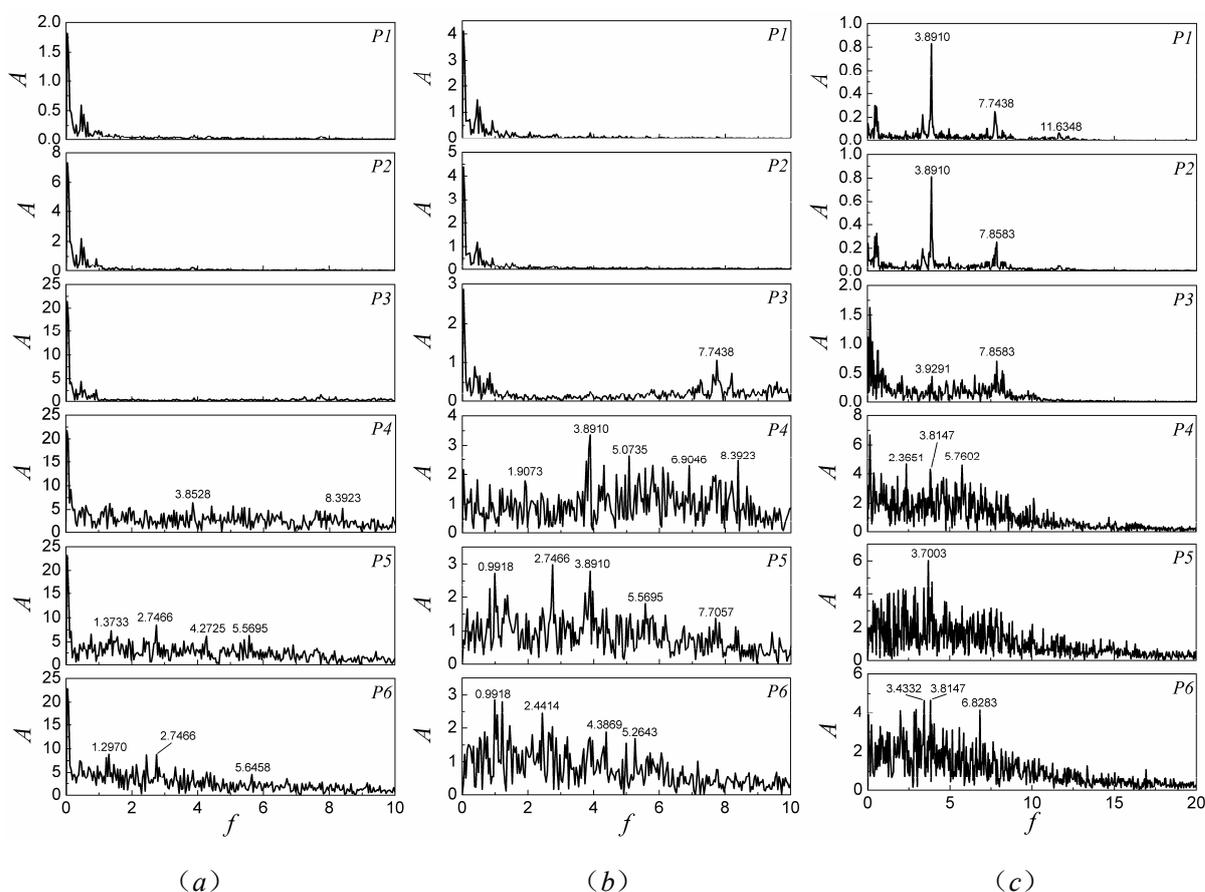


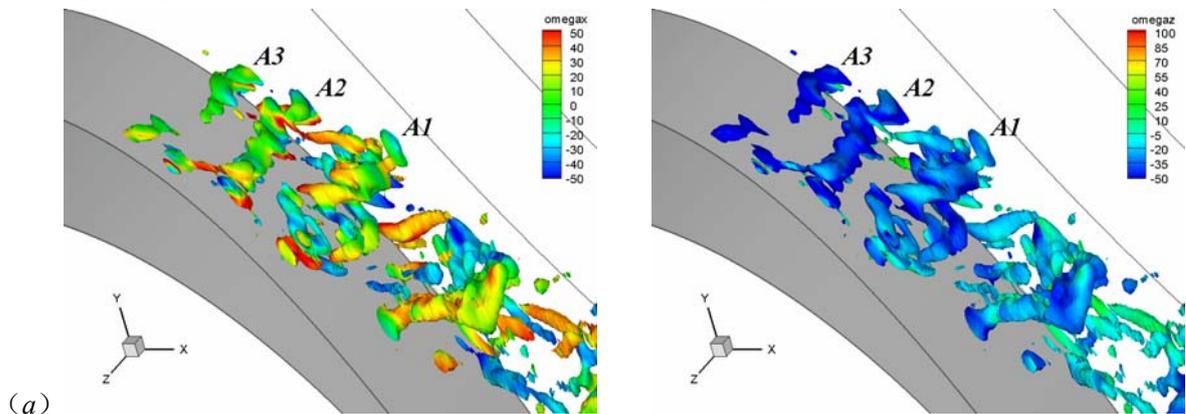
图 88 算例 C2 中不同流场变量在监测点 P1-P6 的频谱对比 (a) 速度分量 v ；(b) 压力 p ；(c) 速度分量 w

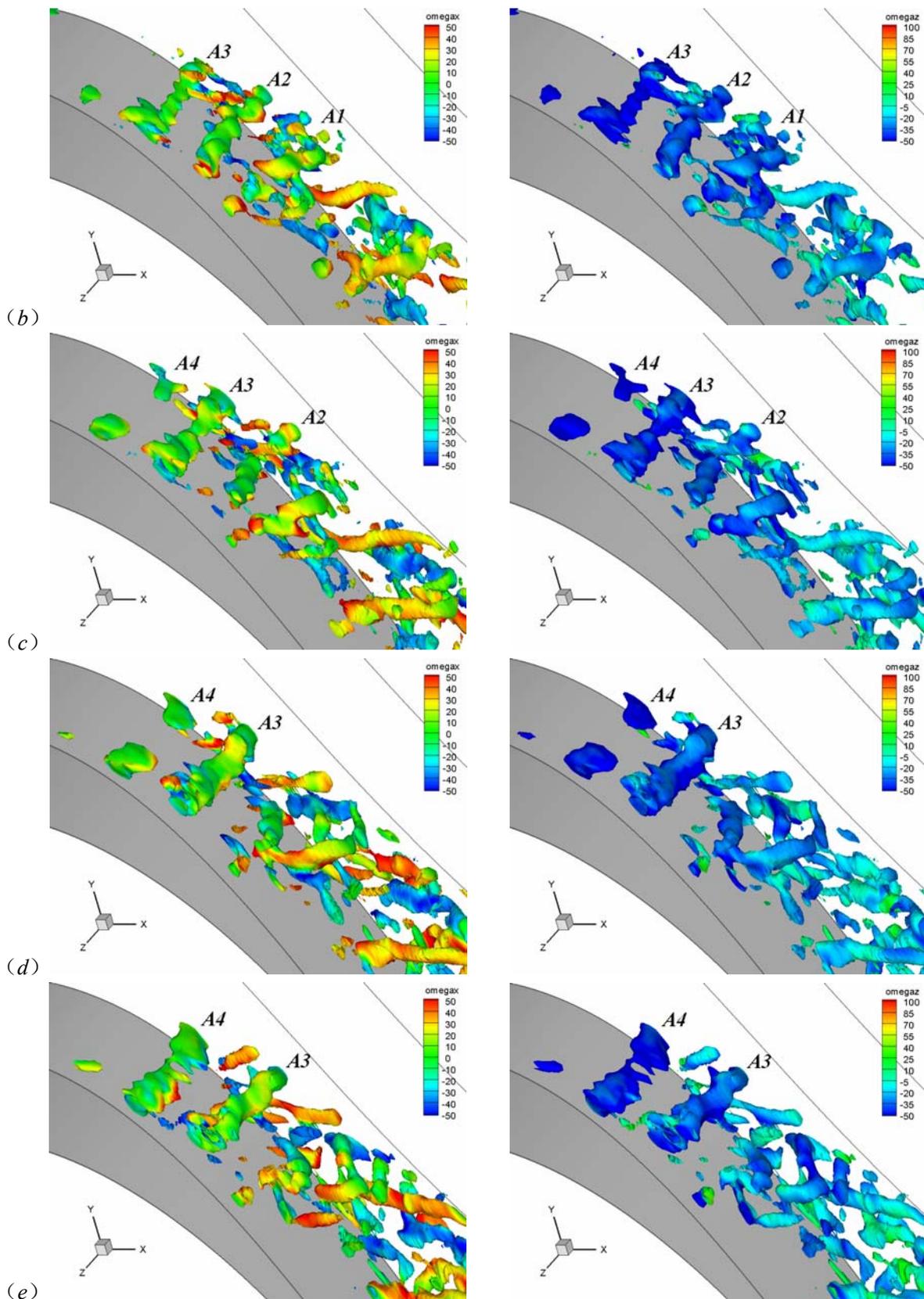
利用公式(5.40)，容易计算分离点的 Strouhal 数 Sr_{θ_s} ，对于 C2，已知 $f = 8.3923$ ，时均分离点处， $\theta_s = 0.0025686$ ， $U_{es} = 1.2286$ ，于是 $Sr_{\theta_s} = 0.01755$ ，和 C1 的 $Sr_{\theta_s} = 0.00954$ 相比，二者存在很大差别，该数值也不在其他研究者给出的取值范围内（表 14），这表明：在背景湍流度存在的条件下， Sr_{θ_s} 的数值会发生比较显著的变化。

图 89 给出了算例 C2 吸力面分离区大尺度相干结构的时间演化序列，左边和右边图画

等值面分别用涡量 ω_x 、 ω_z 着色，图中同样对典型的涡结构进行了标记，字母A开头的代表展向涡。观察图画可以发现，从分离点朝向下游，展向涡很快卷起，并在平均流的作用下往下游输运，由此形成图中A1-A2-A3、A2-A3-A4 这样的展向涡列。计算域入口加入的背景湍流度，受到平均流的拉伸/压缩作用，在叶栅通道内逐渐演化为细长的流向涡，展向涡从形成开始，就不断受到这些流向涡的“撞击”，由此导致其等值面极不光滑；这种相互作用使得展向涡迅速失稳，其生存的时间很短，比如图（a）中的A1，虽然还存在沿着展向的轮廓，但实际上已经破碎成许多尺度较小的涡结构。图中似乎也没有观察到展向涡的配对现象，这可能是由于次谐波的发展需要一定的空间距离，但展向涡在到达该位置以前，通常已经失稳破碎了，由此也可以解释为何在监测点的频谱中观察不到显著的次谐波峰值。此外，流动图画中似乎很少见到大尺度的流向涡结构，这也可能是由于展向涡生存时间太短，初生的流向涡来不及长大，展向涡便已经破碎。比较C2和C1的流动图画，可以发现二者存在如下差异：首先，C2中展向涡卷起的位置较C1靠前，且前者的等值面极不光顺、后者则较为光滑；其次，C2中展向涡的生存时间较短，很快破碎成小尺度的涡结构，展向涡很少发生配对现象，C1中展向涡的生存时间较长，配对现象也经常发生；第三，C1中除了大尺度的展向涡外，也存在大尺度的流向涡，且流向涡生存的时间很长，C2中除了很快破碎的展向涡外，很少见到大尺度的流向涡，流场主要由小尺度的结构组成。

图90给出了与图89对应时刻、算例C2中接近展向正中截面涡量模云图的时间演化序列，为了与后者对应，图中对展向涡进行了标记。同C1的时间序列类似，从图中也可以清晰看到分离的剪切层如何失稳，而后卷起二维的展向涡，由此可知在存在背景湍流度的条件下，无粘的K-H不稳定性仍然对剪切层的失稳起着决定性的作用。但和C1相比，C2的自由涡层靠壁面较近，且涡层失稳/展向涡卷起的位置也更接近时均的分离点，因而C2完成转捩的位置较C1靠前，时均分离区尺寸比C1要小。





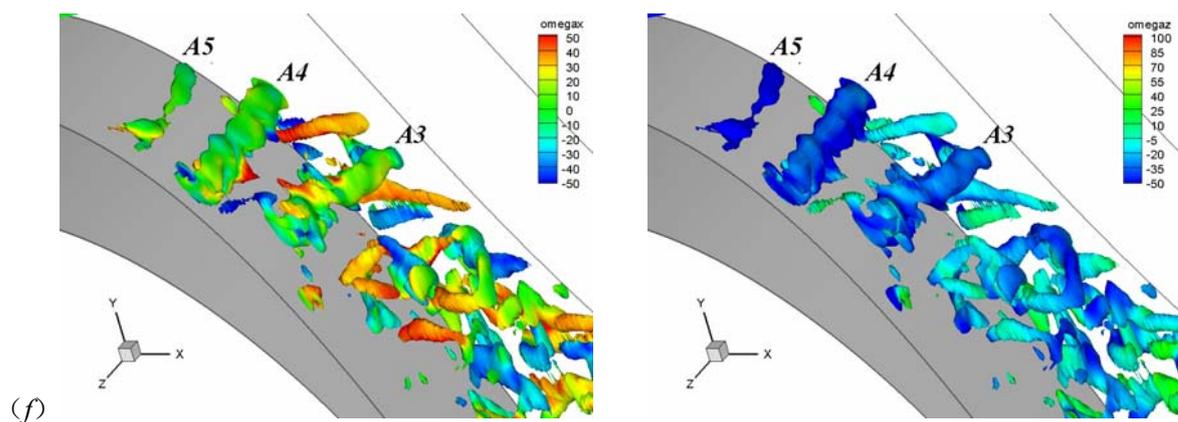
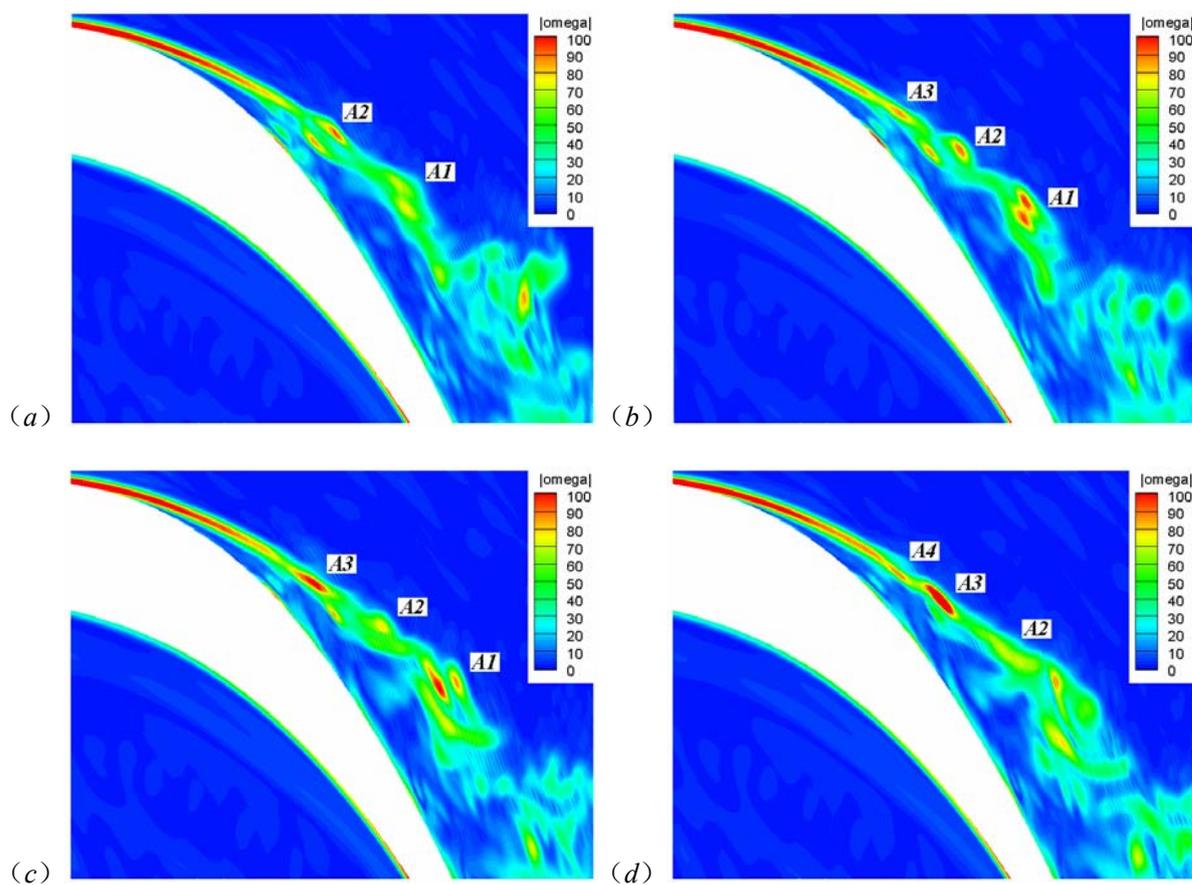


图 89 算例 C2 吸力面分离区大尺度相干结构的时间演化序列, 采用 Q 法则进行旋涡识别, $Q = 250$ 等值面 (a) $t = 39.232$; (b) $t = 39.296$; (c) $t = 39.360$; (d) $t = 39.424$; (e) $t = 39.488$; (f) $t = 39.552$



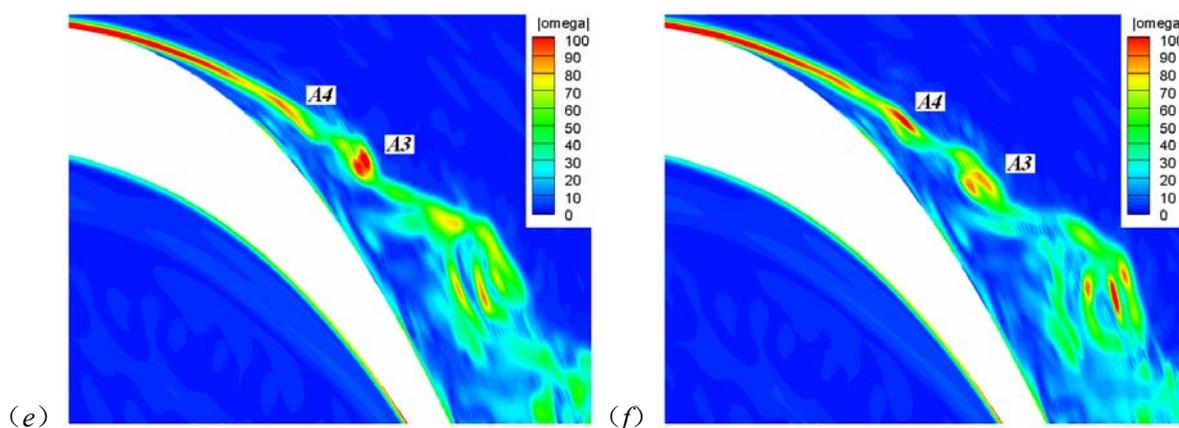


图 90 算例 C2 展向某一截面的时间演化序列，涡量模云图 (a) $t = 39.232$; (b) $t = 39.296$; (c) $t = 39.360$; (d) $t = 39.424$; (e) $t = 39.488$; (f) $t = 39.552$

5.4.7 小结

对于定常来流（算例 C1）和有背景湍流度定常来流（算例 C2）两种入口边界条件下的低压涡轮叶栅流动，本节从时均流动图画、瞬态流动图画、高阶统计量、监测点频谱等各个方面对计算结果进行了分析和比较，从中总结了两种工况下叶片吸力面的分离流动机理，对叶栅入口背景湍流度的效应也有了较为深刻的认识。

两种条件下，在叶片尾缘都会出现吸力面/压力面大尺度结构的交替脱落现象，由此导致叶片所受合力的演化曲线出现准周期性，但算例 C2 的旋涡脱落频率高于 C1。

尾缘旋涡交替脱落引起的压力扰动会沿着叶栅通道向流场的上流传播，在叶栅入口段及叶片前缘附近：对于算例 C1，位势作用会使得除展向速度分量以外的流场变量均出现周期性扰动，但流场仍保持二维状态；对于 C2，由于存在背景湍流度，位势作用对包括展向速度分量在内的所有流场变量都会产生显著影响。

算例 C1 中，叶片吸力面的分离流动可以描述如下：沿着吸力面朝向尾缘，附着的边界层保持二维层流状态，在逆压梯度作用下，层流速度剖面出现拐点，在下游某一位置流线离开壁面，附着的边界层成为二维的自由剪切层，由于 K-H 不稳定性，二维扰动波以最快增长频率迅速发展，涡层失稳，出现波状摆动，而后卷起二维的展向大涡；离散的展向涡随着平均流向下游输运，由于非线性作用，频率为最快增长频率一半的次谐波开始出现和发展，次谐波的迅速增长导致相邻展向涡的配对，最终合并为一个旋涡。边界层分离以后，展向速度分量也开始增长，流动逐渐呈现出三维性，由于在相邻的展向涡之间存在强的拉伸/压缩作用，三维扰动的存在使得沿拉伸方向的旋涡分量得以加强，由此形成反向旋转的流向涡对，在向下游输运的过程中，持续的拉伸作用使得涡对

的尺寸不断增加。比较而言，流向涡对在流场中存在的时间远长于展向涡，其掺混效应对分离剪切层的发展也具有重要影响。

对于算例 C2，分离剪切层失稳而后卷起展向大涡的过程与 C1 类似，仍然受无粘的 K-H 不稳定性控制，但由于背景湍流度的存在，二者的流动图画又存在显著的不同。计算域入口加入的背景扰动，受到平均流的拉伸/压缩作用，在叶栅通道内逐渐演化为细长的流向涡，叶片吸力面的分离区甚至分离前的附着边界层，都能感受到这些小尺度结构的影响。一方面，小尺度结构使得分离前的附着边界层中就存在三维扰动，且其幅值较 C1 的更大（C1 为二维扰动），大幅值的三维扰动使得分离的剪切层迅速失稳，由此展向涡的卷起位置也较 C1 更靠近分离点，作为一种受到外界激励的自由剪切层，C2 的最快增长频率大于 C1。另一方面，展向涡从形成开始，就不断受到小尺度流向涡的“撞击”作用，导致其等值面极不光滑，这种外部扰动也使得展向涡迅速失稳，直接破碎成较小尺度的涡结构，其生存时间较 C1 的展向涡更短。又由于展向涡生存时间很短，次谐波来不及生长，因此 C2 的流动图画中很少见到展向涡的配对现象，也很少见到大尺度的流向涡对。

正是由于算例 C1、C2 在瞬态流动图画上存在的上述差异，就时均结果来看，虽然二者都是开放式分离，但 C2 的时均分离区尺寸比 C1 小，其高阶统计量的量级也比 C1 要小一些，因此 C2 在出口测量平面的总压损失小于 C1，更接近实验结果。总的来说，由于包含了实验中存在的背景湍流度，C2 的流动图画与真实的实验更接近一些。

第六章 周期性尾迹作用下的低压涡轮叶栅流动

上一章已经对定常来流条件（定常来流，有背景湍流度的定常来流）下的低压涡轮叶栅流动进行了分析，本章的主要内容则是关于周期性尾迹作用下的叶栅流动，包括周期性尾迹来流、有背景湍流度的周期性尾迹来流两种工况。

6.1 计算参数设置与计算结果后处理

从上一章 5.1~5.3 节的介绍已经知道，对于本章分析的周期性尾迹来流算例C3、C4，除入口边界条件外，其他计算参数的设置与定常来流算例C1、C2 基本保持一致，具体细节可参考相关内容，本节则主要讨论C3、C4 中由于确定的尾迹周期性给计算参数设置及计算结果后处理带来的影响。

首先分析时间步长的选择，算例C1、C2 中，取 $\Delta t = 4 \times 10^{-4}$ ，主要考虑因素是显式时间推进格式的稳定性（即CFL条件），但对于算例C3、C4，除了这一因素外，从 3.6.1 的论述可知：对于存在明确周期的流动问题，后处理时会引入相位平均的概念，这就要求每个周期输出的样本数目必须取整数，由此影响了时间步长的选择。从 5.1 和 5.2 节已经知道，叶栅的无量纲栅距 $t = 1.22114$ ，而为了减小计算量，上游相邻尾迹的距离 $t_b = t/3$ ，又已知无量纲的尾迹运动速度 $U_b = 0.152438$ ，于是，尾迹通过周期计算如下：

$$T = t_b / U_b = t / (3U_b) \approx 2.67025 \quad (6.1)$$

如果和 C1、C2 一致，取 $\Delta t = 4 \times 10^{-4}$ ，则每个周期的计算步数 $n_T = T / \Delta t \approx 6676$ ，事实上，相邻流场样本间通常会间隔数十个 Δt ， $n_T = 6676$ 显然不能保证在一个周期内输出整数个样本，因此将 n_T 取为最接近 6676 的 7000，于是，时间步长：

$$\Delta t = T / n_T \approx 3.8146432923963 \times 10^{-4} \quad (6.2)$$

综上所述，在 C3、C4 的计算中，时间步长取 $\Delta t = 3.8146432923963 \times 10^{-4}$ ，每个尾迹通过周期计算 7000 步，每 40 步输出一个瞬态流场（同 C1、C2 一样），由此每个周期有 175 个样本文件，即 175 个相位。

接下来考虑计算结果的输出及后处理。C3、C4 计算的初场均来自算例C1 的某一瞬态流场，入口边界加入尾迹后，显然，流动需要演化足够长的时间才能进入统计定常状态，在此之后才可以进行流场的采样。图 91 给出了算例C3、C4 中涡轮叶片所受压力合力在 x 、 y 方向分量 P_x 、 P_y 的时间序列，从图中容易看出： $t \approx 0 \sim 10$ 的初始阶段，流动

从初场开始演化，各条曲线的波动较为杂乱，很难发现规律性； $t \approx 10 \sim 20$ 阶段，尾迹的效应变得明显起来，各条曲线逐渐出现了与尾迹通过频率一致的周期性振荡；到 $t \approx 20$ 以后，各曲线的周期性振荡变得非常规则，表明流动已进入统计定常状态，可以进行数据的采集了。综合考虑计算时间、存储容量等多种因素，C3、C4 的采样均从 $t = 30$ 以后开始，两个算例各收集 10 个周期的数据，已知每个周期推进 7000 步，输出 175 个瞬态流场，因而用于采样的总时间步数为 70,000 步，流场样本共 1750 个。下文中对计算结果的分析绝大部分来源于这些样本流场的后处理，按 3.6 节的介绍，由于 C3、C4 的流动存在明确的周期，因此计算结果的分析也包括时均统计、相均统计及瞬态流场等几个部分；当然，计算中也在流场里布置了大量监测点，其时间序列用于进行频谱/能谱等的分析。

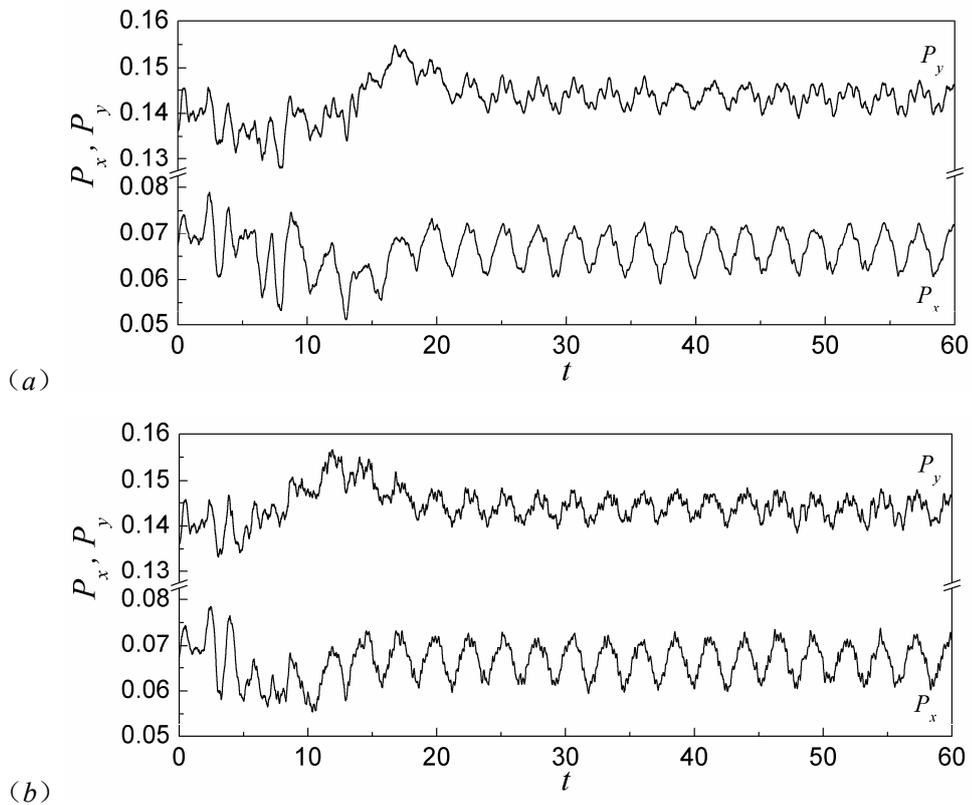


图 91 涡轮叶片所受压力合力在 x 、 y 方向分量 P_x 、 P_y 的时间序列 (a) 算例 C3; (b) 算例 C4

图 91 给出的时间序列除了用来判断流动所处的状态，还可以从中解读出一些其他信息：进入统计定常状态后，C3、C4 的演化曲线均呈现规则的周期性振荡，其频率与尾迹通过频率一致；两者对比还可以看出，C3 的曲线相对光滑，C4 则在大幅值振荡的基础上叠加了一些小尺度的脉动，显然，小尺度脉动代表了 C4 中背景湍流度的效应。演化曲线的这些特征表明：尾迹作用下，叶栅流动的特性很大程度上受尾迹控制，背景湍流度

的效应并不显著。接下来对比C3、C4和C1、C2（见图70）的时间序列，从上一章的分析可知，C1、C2的演化曲线具有准周期性，该周期性来源于叶片尾缘吸力面/压力面大尺度结构的交替脱落，但在C3、C4中，这种效应在图中似乎并不明显，其原因可能是由于尾迹的存在抑制了尾缘的大尺度结构，导致尾涡交替脱落引起的脉动不再显著。对比统计定常阶段 P_x 、 P_y 的时均值还可以发现，C3/C4的 P_x 值较C1/C2小，但 P_y 值较C1/C2大，也就是说，尾迹作用下，叶片的升力增加、阻力减小，这显然是叶片吸力面大尺度分离受到抑制的结果。综合上面的分析，可以预期：正是由于尾迹的存在，抑制了叶片吸力面的大尺度分离，使得叶片的升力增加、阻力减小，同时尾涡交替脱落引起的压力合力脉动也不再显著，整个叶栅的流动特性很大程度被尾迹所控制。

6.2 时均流动图画

将采样获取的所有瞬态流场进行系综平均，然后再沿计算域展向做空间平均，就可以得到二维的时均流场，本节分析即以此为基础。图92给出了叶片表面等熵马赫数的分布，从图中容易看出：无论沿压力面还是吸力面，C3、C4的曲线都几乎完全重合在一起，这表明，尾迹作用条件下，背景湍流度对叶片表面等熵马赫数分布的影响极为有限，周期性尾迹很可能变成了控制流场演化的最主要因素；和实验数据对比可以发现，压力面C3/C4的曲线与实验结果吻合的很好，吸力面的情形虽然差一些，但C3/C4沿叶片表面的发展趋势与实验数据保持一致，其中最显著的特征便是 $x=0.7$ 附近的压力平台，容易判断，该平台表明吸力面此位置附近存在一个闭合的分离泡。接下来对比定常来流条件的结果（见图72），显然，沿叶片压力面，有无周期性尾迹对 Ma_{is} 分布的影响并不大，至少两种条件下其发展趋势完全一致；但在叶片的吸力面，情况则完全不同，周期性尾迹作用下，C1/C2中吸力面后部的大尺度开放式分离区域不再存在，取而代之以尺寸很小的闭合分离泡，这一变化导致C1/C2中从吸力面中部持续到尾缘的大的压力平台不再存在，同时 Ma_{is} 的峰值增大，其位置后移，也正是因为这些原因，使得叶片的升力增加。

图92中，虽然C3/C4吸力面曲线的发展趋势与实验数据保持一致，但二者对比仍存在不少差别：首先，从叶片前缘到 $x \approx 0.4$ 位置，计算得到的 Ma_{is} 数值较实验结果偏低；其次，实验中叶片吸力面加速到 $x \approx 0.44$ 位置出现峰值，而计算的峰值则出现在 $x \approx 0.52$ 处，也就是说，计算中加速区的长度比实验大；第三，虽然沿吸力面后部的减速区均存在表征分离泡的压力平台，但很明显，实验中压力平台的长度比计算结果大，这说明计算预

测的分离泡尺寸较实验结果偏小。分析产生这些差异的原因，对于第一个问题，吸力面前部较低的 Ma_{is} 数值可能来源于计算中进口气流角的变化，图 93 给出了尾迹速度亏损导致进口气流角减小的示意图，从 5.3.1 关于进口边界条件的介绍已经知道，所有 4 个算例中，进口气流角 β_1 取值保持不变，但对于存在周期性尾迹的算例 C3/C4，因为运动圆柱参考系中的尾迹区速度 U_{wake} 小于主流区速度 U_{rel} （如图 (a)），合成到涡轮叶栅参考系后，尾迹区的气流角 β_{1wake} 显然小于主流区的 β_1 （如图 (b)），C3/C4 在主流区的气流角虽然与 C1/C2 一致，但由于尾迹的存在，从平均效果看，其时均流场的气流角必然比 C1/C2 的要小。另外，通过 5.4.1 对 C1/C2 时均流动图画的分析已经知道，其前缘滞止点位于叶片的压力面（见图 73 (b)），虽然 C3/C4 的滞止点也在压力面，但位置比 C1/C2 的更靠近叶片前缘，而这正是由 C3/C4 进口气流角减小所造成的。从文献 [351] 关于叶片前缘吸力峰的研究可知，滞止点前移后，气流从该位置加速到（吸力面）前缘与叶身连接点的距离也减少，吸力峰减弱，由此吸力面 Ma_{is} 的第一个极大值减小，可能正是由于这个原因，才使得叶片前部 Ma_{is} 的数值整体偏低。对于第三个问题，计算得到的分离泡尺寸比实验结果小，这是因为模拟过程中为减少计算量，将相邻尾迹的距离改为叶栅栅距的 1/3，提高了尾迹的通过频率，由此尾迹对吸力面分离区的抑制作用增强，分离泡尺寸减小；此外，计算域入口加入的尾迹强度较大也可能是一个原因。接下来考虑第二个问题，对于吸力面存在的分离泡，当其尺寸较大时，可能改变叶栅通道的实际形状，对比实验和计算，因为实验的分离泡尺寸较大，叶栅的喉道位置前移，由此吸力面的峰值马赫数位置也比计算结果靠前。总的来说，虽然实验和计算中叶片吸力面的等熵马赫数分布存在上述差异，但这些差异对吸力面边界层的主要流动结构及其演化机理并不产生本质影响，因此通过分析数值模拟结果来了解相关细节仍是可行的。

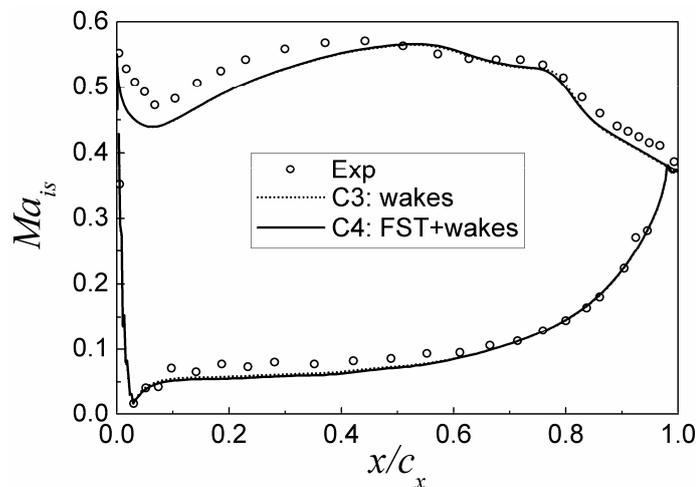


图 92 时均流场叶片表面等熵马赫数分布

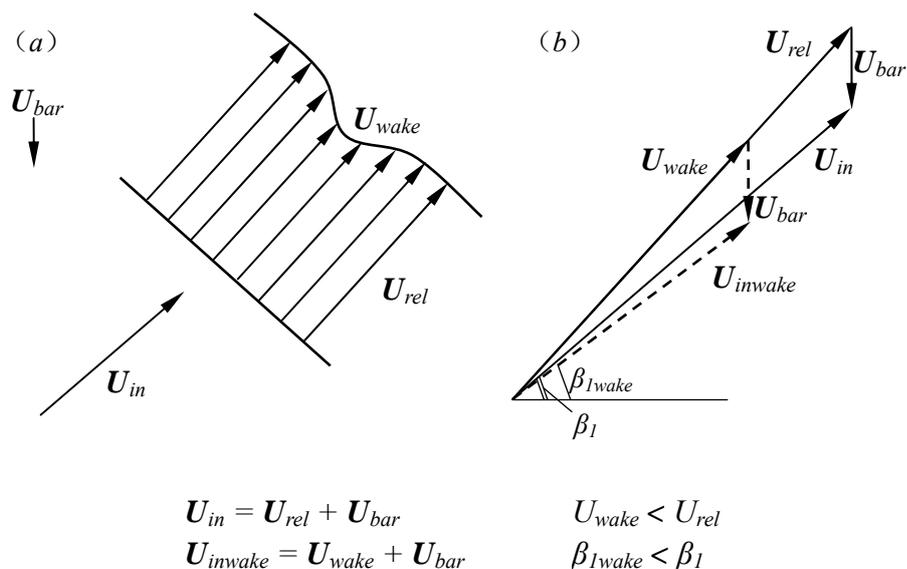


图 93 尾迹速度亏损导致入口气流角减小的示意图 (a) 运动圆柱参考系中的尾迹速度剖面; (b) 主流区与尾迹区的速度合成

图 94 给出了时均流场中叶片吸力面第一层网格单元的 y^+ 分布, 由于计算采用网格中心的有限体积法离散, 这里的 y^+ 代表控制体中心到壁面的距离。从图中可以看出, C3 和 C4 的 y^+ 分布非常接近, 只在分离泡区域存在比较明显的差异 (两组竖线分别代表分离点和再附点的位置); 从后文的分析又可以知道, 分离流再附以后, 吸力面边界层才完成从层流到湍流的转换, 因此只需关心这一区域 y^+ 的取值, 在 $s \approx 0.8$ 处, y^+ 的极大值接近 1.5, 基本可以满足大涡模拟对近壁网格分辨率的要求。这也从一个侧面说明 C3/C4 的计算结果具有较高的可信度, 由于 C1/C2 对网格的要求低于前者, 其结果显然也应该是可信的。

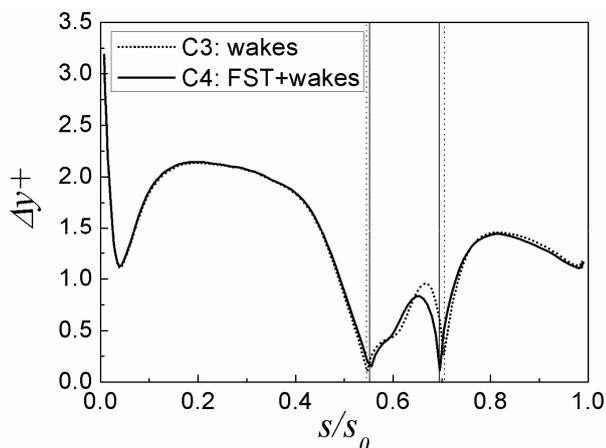


图 94 时均流场中叶片吸力面第一层网格单元的 y^+ 分布 (控制体中心到壁面的距离), 竖线代表各自的分离/再附位置

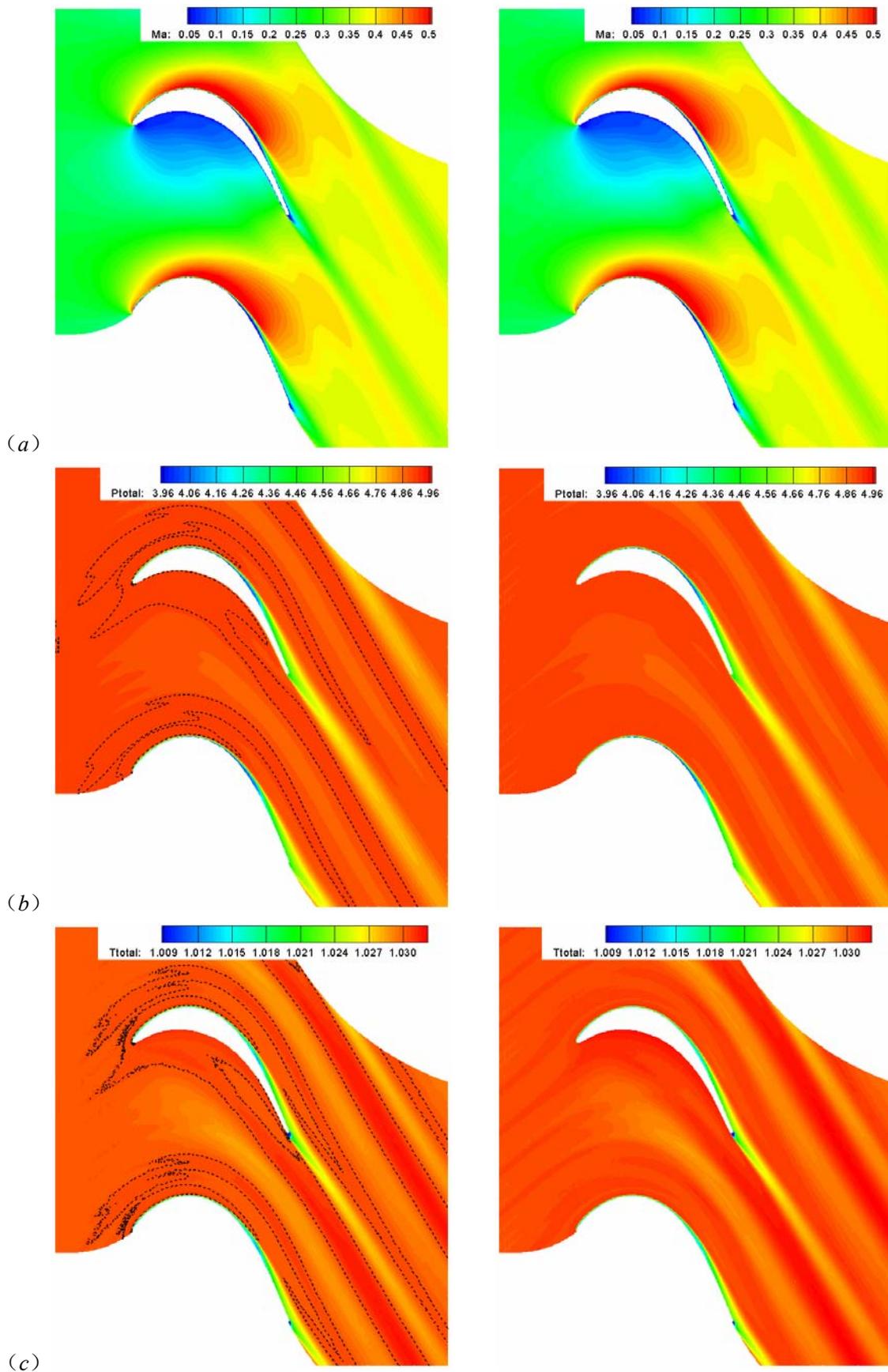
6.2.1 叶栅流动全貌

图 95 给出了 C3、C4 时均流动图画的对比如，其中图 (a) 是叶栅的马赫数云图，图 (b) 和 (c) 分别是总压和总温云图，图 (d) 是时均流场的熵增云图，图 (e) 则是局部放大的吸力面分离泡区域流线及展向涡量云图。比较 C3、C4 容易发现，两个算例的时均流动图画非常接近，几乎看不出任何明显的差别，其中马赫数云图、熵增云图的差异更是极其微小，这进一步说明背景湍流度对尾迹来流流场的影响非常有限。在周期性尾迹作用下，C1/C2 中吸力面后部的大尺度开放式分离（见图 73）不再存在，取而代之以图 (e) 中尺寸很小的分离泡：显然，尾迹的周期性扫掠在很大程度上抑制了吸力面边界层出现大分离的趋势。对比图 (e) 中的时均分离泡，C3 的尺寸比 C4 稍大，这应该是背景湍流度效应的主要表现之一，由于分离泡尺寸的变化，两个算例的再附边界层和叶片尾迹区也应该存在一些差异，但从图 (a) ~ (d) 来看，这种差别很不明显，几乎不能分辨；对于总压和总温云图，在计算域入口段存在一些可见的细微差异，这也是由 C4 入口的背景湍流度引起的。相比定常来流条件的叶栅流动，周期性尾迹引起的非定常效应使得 C3/C4 的时均流场呈现出一些显著的特点，其主要表现如下：首先，流场中部分区域的总压/总温分布“异常”，一方面，围绕叶片前缘、沿吸力面和压力面直到叶栅出口段，存在两个明显的带状区域，其总压/总温均超过对应的入口测量平面位置的总压/总温，且靠近压力面的“异常”区更加突出，C3 的云图中用虚线近似标识了该区域，容易看出，总压总温“异常”区域的形状非常相似，C4 的云图虽然未对此进行标识，但很明显，其“异常”区的分布与 C3 类似；另一方面，在叶栅通道的中部（压力面/吸力面带状区域之间），从额线附近开始，总压/总温逐渐降低，这一趋势持续到叶片中部位置附近，由此在两个带状区域间形成了一个低总压/总温区，在势流核心区出现这样的总压/总温分布，也显得“不同寻常”。其次，整个叶栅通道内自由流区域（即势流区）的熵增很小，从图 (d) 可以看出，流场的熵增在叶片的边界层及尾迹区数值较大，虽然如前所述，流场中部分区域总压/总温分布“异常”，但包括这些“异常”区在内的整个自由流区域，熵增的数值都近似等于 0。本文采用的熵增计算公式如下^[12]：

$$\Delta s = s - s_{ref} = C_p \ln(T_t/T_{tref}) - R \ln(p_t/p_{tref}) \quad (6.3)$$

其中 T_t 、 p_t 代表流场中某一点的总温和总压， T_{tref} 、 p_{tref} 则是参考的总温总压，计算中将它们取为入口测量平面位置（ $x \approx -0.3489$ 处）的平均值。前已述及，由于“异常”区的存在，流场中自由流区域的总压/总温数值与参考值存在不少差异，而根据上式，要使得熵增近似等于 0，则当地的总压和总温之间必须存在一定的相关性，云图中“异常”

区域形状的相似性似乎暗示了这一点。时均流场出现的上述特点，总的来说与周期性尾迹引入的非定常效应有关，相关解释将在后文给出。



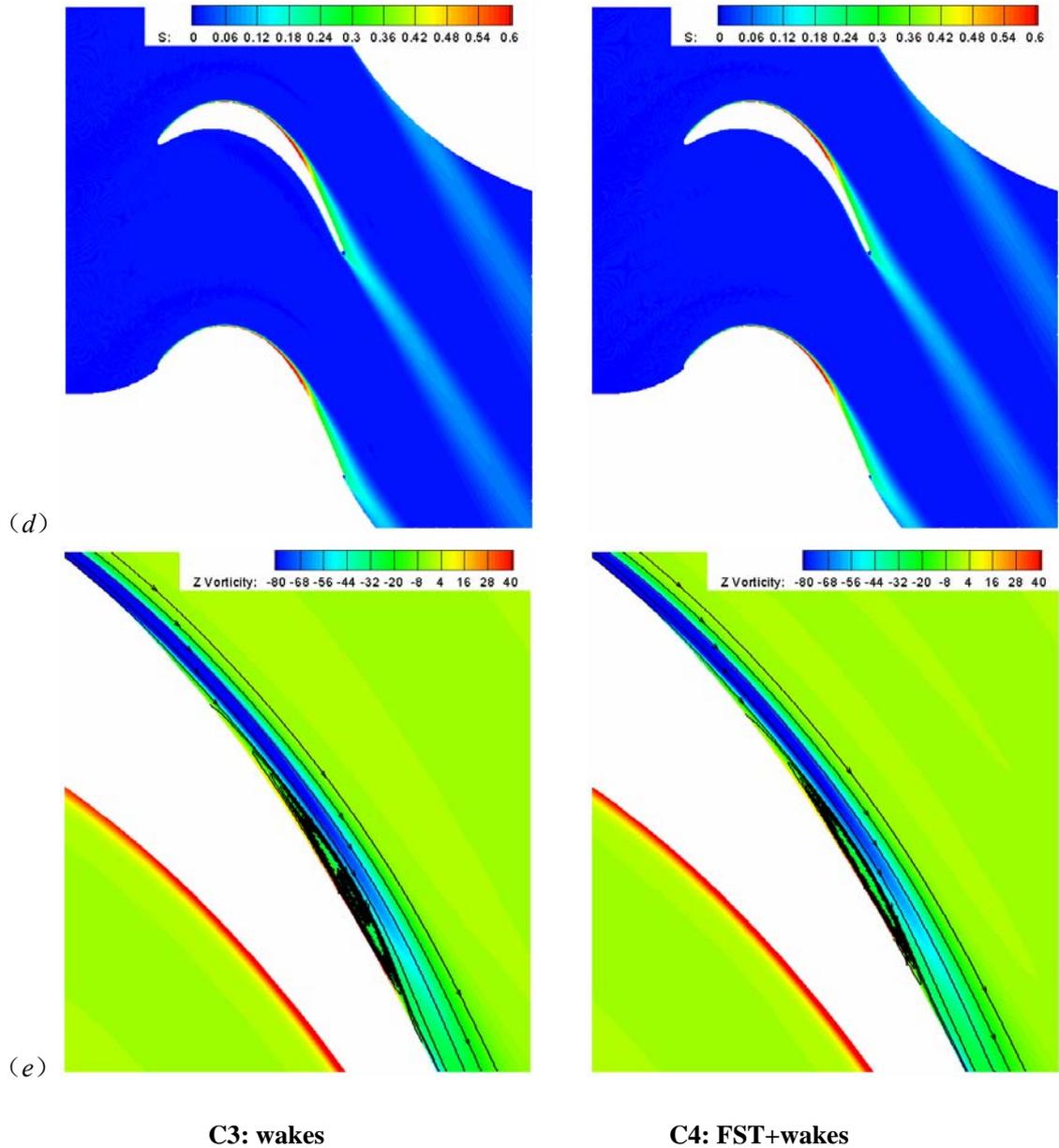


图 95 叶栅时均流动图画对比 (a) 马赫数云图; (b) 总压云图; (c) 总温云图; (d) 熵增云图; (e) 吸力面分离泡流线及展向涡量云图

图 96 给出了出口测量平面总压损失系数 ω 沿 y 向的分布, ω 的定义见式(5.38), 同 C1/C2 的曲线一样 (参见 图 77), 为了和实验数据对比, 图中 y 坐标采用栅距 t 归一化, 其原点位于叶片尾缘且正方向与计算网格 y 坐标的正方向相反。从图中容易看出, C3、C4 的总压损失系数曲线非常接近, 几乎重合在一起, 这再次说明两个算例的时均流场也非常接近。但比较实验和计算结果, 二者的差异却非常明显, 首先, 计算得到的最大 ω 值比实验小, 尾迹损失区的“半宽”也比实验小, 从前文的分析已经知道, 由于计算中尾迹通过频率增加且尾迹强度较大, 使得计算得到的分离泡尺寸较实验偏小, 由此尾迹区的总压损失也偏低; 其次, 在尾迹损失区两侧, 沿着压力面和吸力面, 分别存在一个 ω

取负值的“异常”区域，且压力面一侧的“异常”区更加突出，显然，这是和总压云图中的两个带状区域相对应的，由于该区域的总压大于入口测量平面的平均总压，按照 ω 的计算公式，必然取负值。接下来比较C3/C4和C1/C2的曲线，尾迹作用下，吸力面后部的大尺度分离不再存在，尾迹区的损失大大降低： ω 的最大值从70%降到小于30%，损失区“半宽”也显著减小，显而易见，周期性尾迹对于降低叶片的气动损失作用明显。

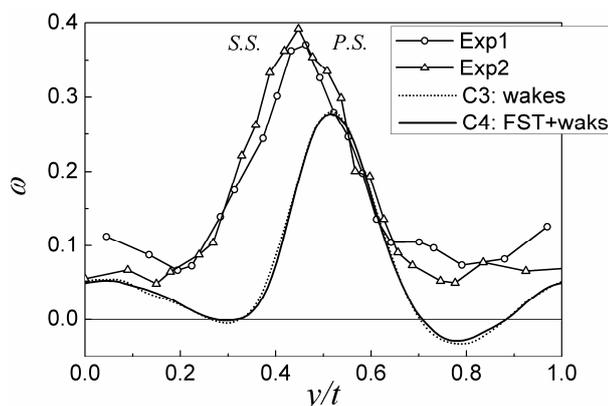


图 96 出口测量平面总压损失系数对比

6.2.2 吸力面边界层的发展

图 97 给出了叶片吸力面剪切应力 τ_{wall} 的分布，其中横坐标 s 代表从叶片前缘开始定义的（归一化）吸力面长度。从图（a）可以看出，C3、C4的曲线非常接近，除 τ_{wall} 取负值（代表时均分离泡）的区域外，其他部分几乎都重合在一起；图（b）则是分离泡附近的局部放大图，图中 $\tau_{wall} = 0$ 的两个位置分别是时均的分离和再附点，C3的分离点位于 $s = 0.546$ 处、再附点 $s = 0.706$ 、分离泡长度 $\Delta s = 0.160$ ，C4的分离点 $s = 0.552$ 、再附点 $s = 0.695$ 、分离泡长度 $\Delta s = 0.143$ ，显然，C3的分离泡尺寸较C4的大，其分离点位于C4之前，再附点则位于C4之后。从1.4.3的叙述已经知道，层流分离泡通常由死水区（dead air region）和回流区（reverse flow region）两部分组成（参见图15），C3、C4的分离泡结构也是如此，在图（b）中，从分离点开始， $|\tau_{wall}|$ 取值较小、曲线接近水平的区域属于死水区，分离泡后半段， $|\tau_{wall}|$ 取值较大且接近对称分布的则属于回流区。比较C3/C4和C1/C2（参见图74）的曲线可以发现，两者的分离点位置存在较大差别，C1/C2的分离点位于 $s = 0.40$ 附近，C3/C4的分离点则接近 $s = 0.55$ 处，产生这一差异的原因有二：首先，从吸力面的等熵马赫数曲线可知，C3/C4中出现逆压梯度的位置较C1/C2靠后；其次，C3/C4中尾迹的存在也会导致时均分离点的后移。此外，两者的曲线还有一个差别：C3/C4中 τ_{wall} 的第一个极小值较C1/C2的大，也就是说，尾迹来流条件下叶片前缘的分离趋势受到了抑制，产生这一差异的原因也可以归结到两点：第一，尾迹条件

下，进口气流角减小，叶片前缘的吸力峰减弱，边界层的分离趋势也因此弱化；第二，尾迹的周期性扫掠对边界层的分离趋势有抑制作用。

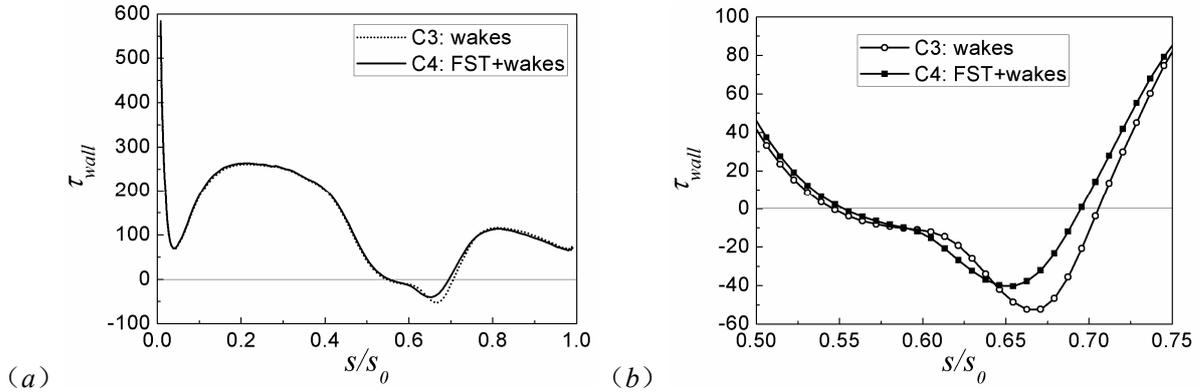


图 97 叶片吸力面剪切应力 τ_{wall} 的分布 (a) 沿整个表面的图画；(b) 分离泡附近的局部图画

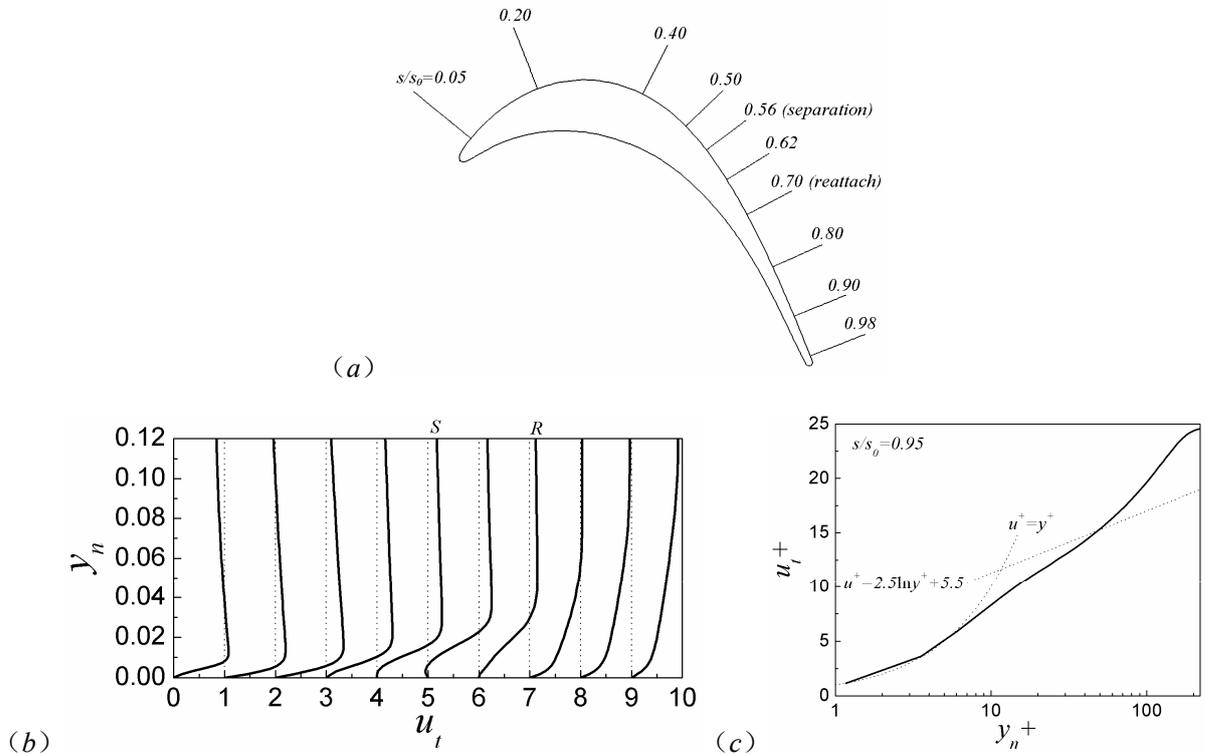


图 98 算例 C4 的时均流场中沿叶片吸力面不同位置的切向速度剖面 (a) 剖面位置示意；(b) 速度剖面对比；(c) 壁面坐标下 $s = 0.95$ 处的速度剖面

图 98 给出了算例 C4 沿叶片吸力面不同位置的切向速度剖面，从前缘到尾缘，10 个剖面的具体位置如图 (a) 所示，其中 $s = 0.56$ 和 $s = 0.70$ 接近分离泡的分离和再附点，沿每个位置作当地的法线，分解时均的二维速度矢量，就可以得到当地的切向和法向速度分量（分别记为 u_t 、 u_n ）。图 (b) 给出了各位置切向速度分量的剖面，可以看出，分离前的 $s = 0.05$ 、 0.20 和 0.40 处，速度型是典型的层流剖面； $s = 0.50$ 处，边界层虽然仍未

分离，但在逆压梯度作用下速度剖面已出现拐点； $s = 0.62$ 位于分离泡内，存在明显的回流； $s = 0.80$ 、 0.90 和 0.98 属于再附的湍流边界层，但很显然，其速度剖面与充分发展的湍流边界层还存在很大差别，图 (c) 给出了 $s = 0.98$ 处壁面坐标下的速度剖面，通过和壁面率的对比，也从侧面证明了这一点。

为了描述叶片吸力面边界层的发展，图 99 给出了一系列积分量的曲线，图 (a) ~ (f) 分别对应位移厚度 δ^* ，动量厚度 θ ，形状因子 H ，动量厚度雷诺数 Re_θ ，摩擦系数 C_f 和耗散系数 C_D ，前四个积分量的定义见式(5.34)~(5.37)，摩擦系数 C_f [14] 和耗散系数 C_D [12][352] 的定义如下：

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_e u_e^2 \text{Re}} \quad (6.4)$$

$$C_D = \frac{T \dot{S}}{\rho_e u_e^3} \quad (6.5)$$

式中下标 e 代表边界层外缘的自由流参数，摩擦系数 C_f 的定义清晰明确，而耗散系数 C_D 的定义及其物理含义则相对复杂，接下来先对此进行简单的说明。对于流场损失的描述，存在多种不同的定义，如前述的总压损失系数曲线、熵增云图等，熵增虽然可以清晰再现流场中损失的分布情况，但却无法区分流场损失的来源（当地产生的损失或其他地方输运来的损失），要清晰刻画流场当地产生的损失，就需要引入熵产率（entropy generation/production rate）的概念。首先给出一般形式下熵的输运方程 [14][352]：

$$T \frac{Ds}{Dt} = \dot{Q} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (6.6)$$

对于二维定常不可压的边界层流动，假设没有热源，上式可简化为：

$$T \frac{DS}{Dt} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.7)$$

这里 $S = \rho s$ ，代表单位体积的熵，假设壁面绝热且边界层边缘没有热通量，从壁面到 $y = \delta$ 积分上式可以得到：

$$T \int_0^\delta \frac{DS}{Dt} dy = \int_0^\delta \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (6.8)$$

定义 $\dot{S} = \int_0^\delta \frac{DS}{Dt} dy$ ，代表单位面积（二维即单位长度）边界层的熵产率，将上式带入式(6.5)，于是 C_D 的计算公式变为：

$$C_D = \frac{1}{\rho_e u_e^3} \int_0^\delta \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (6.9)$$

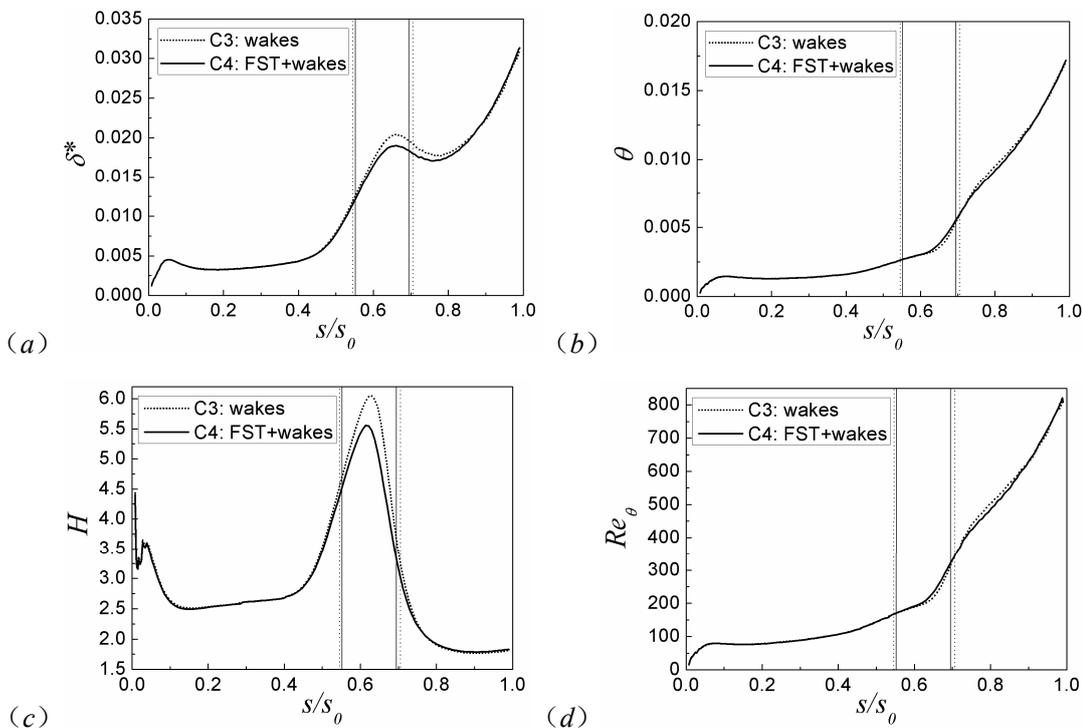
对于湍流边界层， τ_{xy} 项需要包含雷诺应力^{[7][10]}：

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \quad (6.10)$$

从上面的推导可以看出，耗散系数是来源于边界层熵产率的无量纲参数，准确表征了当地损失的产生情况，用它来描述边界层的发展显然是很有意义的。由于上述推导针对二维的平板边界层，对于涡轮叶片的曲壁边界层，则必须沿当地的法向进行积分，又由于雷诺应力的定义依赖于坐标系，式(6.10)中的 $\overline{u'v'}$ 需要使用当地切向-法向坐标系下的数值，相关的计算公式见 6.4 节。

观察图 99 的各幅图画，容易看出，C3、C4 各条曲线的发展趋势完全一致，除分离泡附近区域可能存在的差异外，曲线的其他部分几乎都重合在一起，这再一次说明周期性尾迹可能是控制流场演化的最主要因素，而背景湍流度只对流动产生有限的影响。在图 (a) 中，时均分离点以前，C3、C4 位移厚度的差别很小，从分离点开始，二者的差异逐渐增加，在分离泡内部的某一位置， δ^* 取极大值，C3、C4 的差异也达到最大，时均再附点后，二者的差别逐渐减小，最后不可分辨，位移厚度的这种差异正是图 95 (e) 中 C3 分离泡尺寸大于 C4 的体现。虽然位移厚度存在上述差别，但在图 (b) 的动量厚度曲线中，C3、C4 的差异非常微小， θ 值从分离泡内某一位置开始快速增加，没有经历 δ^* 曲线先减小再增大的变化过程。形状因子的取值可以表征边界层所处的流动状态，平板层流边界层的 H 通常取 2.6，层流分离时 H 取 4，而湍流平板边界层 $H \approx 1.2 \sim 1.5$ ，分离时 $H \approx 2 \sim 3$ ^[14]。图 (c) 中，C3、C4 的形状因子也只在分离泡区域存在较大的差异，C3 的数值比 C4 稍大一些；分离前的 $s \approx 0.1 \sim 0.4$ 段， H 取值在 2.6 附近，这表明附着的边界层处于层流状态；而后 H 快速增加，到时均分离点时，C3 的 $H_{sep} = 4.56$ 、C4 的 $H_{sep} = 4.54$ （作为对比，C1 的 $H_{sep} = 4.66$ 、C2 的 $H_{sep} = 4.63$ ），这一数值比平板边界层的 $H = 4$ 要大一些；通过时均再附点以后， H 迅速减小，最后的取值在 1.8 附近，显然，这和典型湍流平板边界层的数值存在一些差异，说明再附后的边界层与充分发展的湍流边界层并不相同，此外，再附边界层所处的逆压梯度环境也可能是一个影响因素。从图 (d) 可知，C3 在分离点处的动量厚度雷诺数 $\text{Re}_{\theta_s} = 168$ 、C4 取 $\text{Re}_{\theta_s} = 171$ （作为对比，C1 的 $\text{Re}_{\theta_s} = 142$ 、C2 的 $\text{Re}_{\theta_s} = 159$ ），按照 1.4.3 中 Hatman 和 Wang 对分离泡的分类，C3、C4 的时均分离泡似乎应属于层流分离长模态（ $\text{Re}_{\theta_s} < 240$ ），但

从吸力面的等熵马赫数曲线看，分离泡对压力分布只有局部效应，因而实际属于短分离泡，这说明，尾迹作用条件下，Hatman和Wang的分类标准可能不再继续有效。分离点的动量厚度雷诺数也是判断吸力面转捩类型的重要参数，Addison和Hodson的研究表明^[241]，尾迹诱导的附着流转捩直到动量厚度雷诺数大概超过90~150这一量级才会发生，对于C3和C4， Re_{θ_s} 均已超过该量级，也就是说，分离点之前的附着流在尾迹作用下存在转捩的可能性，但目前已有的信息还难以对此进行判断，更多的分析将在6.6节给出。图(e)的摩擦系数曲线与图97的壁面剪切应力曲线具有相似性，C3和C4只在分离泡区域存在一些差别。图(f)中，耗散系数沿吸力面的发展具有如下特征：分离前的绝大部分区域， C_D 缓慢减小，在时均分离点附近取最小值，而后开始迅速增大，到达再附点时， C_D 取最大值，然后又逐渐减小；C3和C4比较，再附点附近，C3的数值比C4更大一些，也就是说，大的分离泡尺寸对应大的流动损失。通过耗散系数曲线可以知道：从分离点开始，分离泡的损失迅速增加，再附点时到达最大，而后逐渐减小，要减小吸力面的流动损失，就必须采取措施减小分离泡的尺寸。综合分析各积分量的曲线可以发现，虽然由于分离泡尺寸的差别，C3、C4大部分的曲线在分离泡附近区域存在一些差异，但在再附点以后，这些差异逐渐消失，也就是说，再附后端流边界层的特性逐渐趋于一致，这或许可以用来解释图95中C3、C4的再附边界层/叶片尾迹区云图的差异为何非常微小。



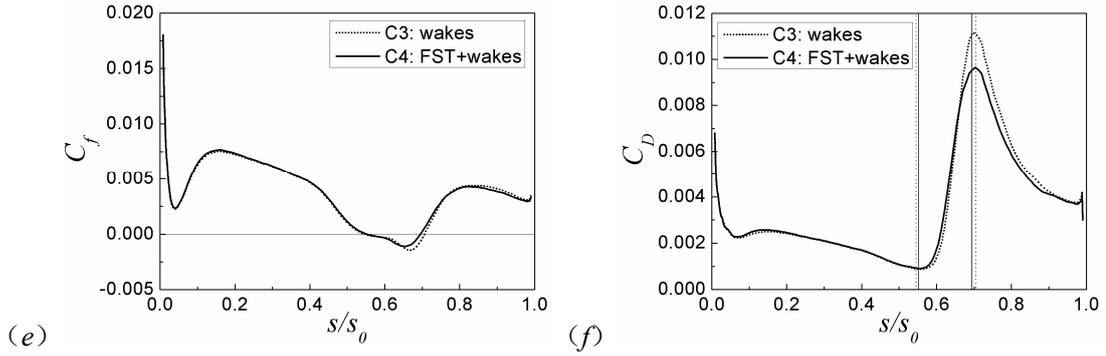


图 99 时均流场叶片吸力面边界层的发展，图中竖线分别代表两个算例的分离/再附点位置 (a) 位移厚度 δ^* ；(b) 动量厚度 θ ；(c) 形状因子 H ；(d) 动量厚度雷诺数 Re_θ ；(e) 摩擦系数 C_f ；(f) 耗散系数 C_D

由于C3、C4曲线的相似性，图 100 以C4 为例，给出了沿叶片吸力面各种参数的对比。图 (a) 同时画出了位移厚度 δ^* 和等熵马赫数 Ma_{is} 的曲线，从图中可以发现，二者的相关性非常明显：从前缘附近开始，在逆压梯度作用下， δ^* 增长较快，变为顺压梯度后， δ^* 的增长非常缓慢，再次出现逆压梯度， δ^* 快速增长，流动分离，由于分离流的再附， δ^* 稍有减小，而后在逆压梯度下，再附湍流边界层的 δ^* 又迅速增长直到叶片尾缘。图 (b) 给出了位移厚度 δ^* 、动量厚度 θ 和形状因子 H 的曲线，由于 H 定义为 δ^* 和 θ 的比值，从图中很容易看出 δ^* 和 θ 的相对变化如何导致了 H 的变化。

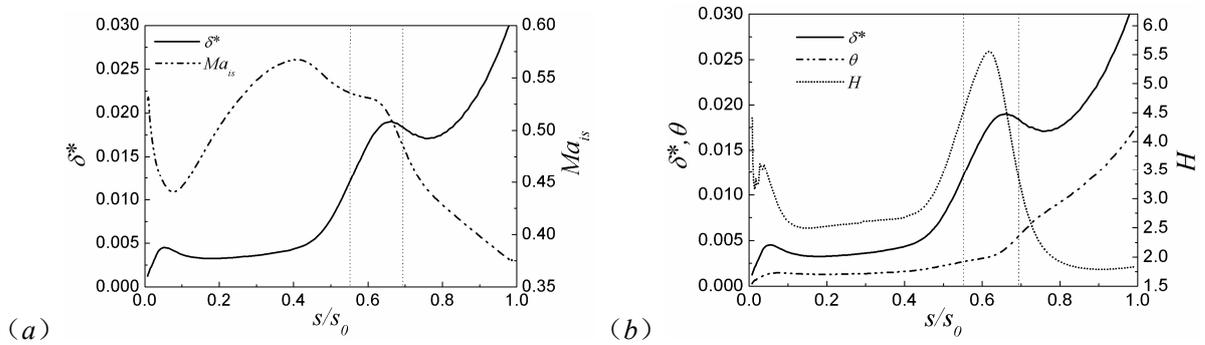


图 100 算例 C4 的时均流场，沿叶片吸力面各种参数的对比 (a) δ^* 和 Ma_{is} ；(b) δ^* 、 θ 和 H

图 101 给出了算例C4 的摩擦系数/耗散系数曲线与经验曲线的对比。对于 C_f 和 C_D ，分别存在如下的经验公式^{[12][14][352]}：

$$C_f = \begin{cases} 0.441/Re_\theta & (laminar) \\ 0.0258/Re_\theta^{1/4} & (turbulent) \end{cases} \quad (6.11)$$

$$C_D = \begin{cases} 0.173/Re_\theta & (laminar) \\ 0.0056/Re_\theta^{1/6} & (turbulent) \end{cases} \quad (6.12)$$

需要注意的是，上述公式针对平板边界层，且式(6.11)是作者通过 C_f 、 Re_x 、 Re_θ 三者的关系式导出的。在图(a)中，可以发现，分离前的层流边界层， C_4 的结果较经验公式偏高，再附后的湍流边界层， C_4 的结果又较经验公式偏低。图(b)中，分离前的整个层流边界层都和经验公式吻合的很好，再附后的湍流边界层， C_4 的结果比经验公式高不少，这说明再附后的边界层存在比充分发展湍流边界层高得多的损失。

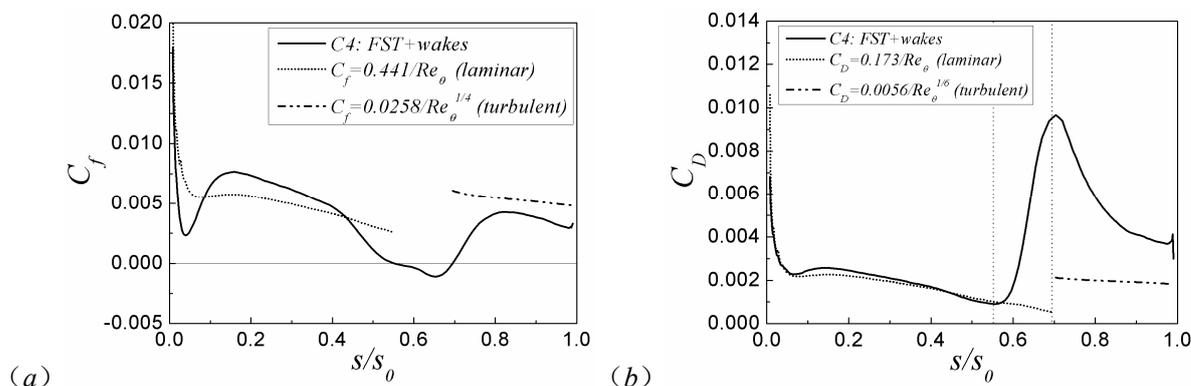


图 101 算例 C4 的时均流场，吸力面边界层摩擦系数/耗散系数曲线与经验曲线的对比 (a) 摩擦系数 C_f ；(b) 耗散系数 C_D

6.3 瞬态流动图画

图 102 给出了算例 C3、C4 展向某一截面的瞬态流动图画，左边 3 幅是算例 C3 在 $t = 53.405006$ 时刻的流场，右边 3 幅则是 C4 在 $t = 50.734756$ 时刻的流场，它们对应的周期性尾迹相位均为 $\phi = 1/7$ ，图 (a) ~ (c) 分别是速度分量 u 、速度分量 v 和涡量模 ω 的云图。观察图画可以发现，虽然由于湍流场自身的随机性，C3、C4 瞬态流场的细节存在差异，但从总体上说，二者的云图是非常相似的。图 (a) 和 (b) 中，在计算域入口段可以清楚看到倾斜的低速带条，它们是由尾迹的速度亏损造成的，标示了瞬态流场中尾迹的位置；进入叶栅通道后，绝大部分尾迹不再能够分辨，只是在图 (a) 中，最靠近吸力面的一条尾迹由于“扰乱”了 u 的等值面而变得可见；由于尾迹的扫掠，吸力面不存在大尺度的分离区，边界层很薄，因而叶片尾迹区的宽度也很小。相比速度分量云图，图 (c) 通过 ω 对尾迹的展示显然要清楚的多，从中可以清晰看到处于不同演化阶段的尾迹形态，由于计算设定的尾迹通过频率很高，导致叶栅通道内大部分区域都充斥着尾迹；背景湍流度的效应也在图中有较好的体现，C3 的云图，相邻尾迹间的区域显得较为“干净”，但在 C4 中，由于背景湍流度的影响，该区域也明显的存在着一些涡量，而在 u 、 v 云图中，似乎没有这么清晰的差别。

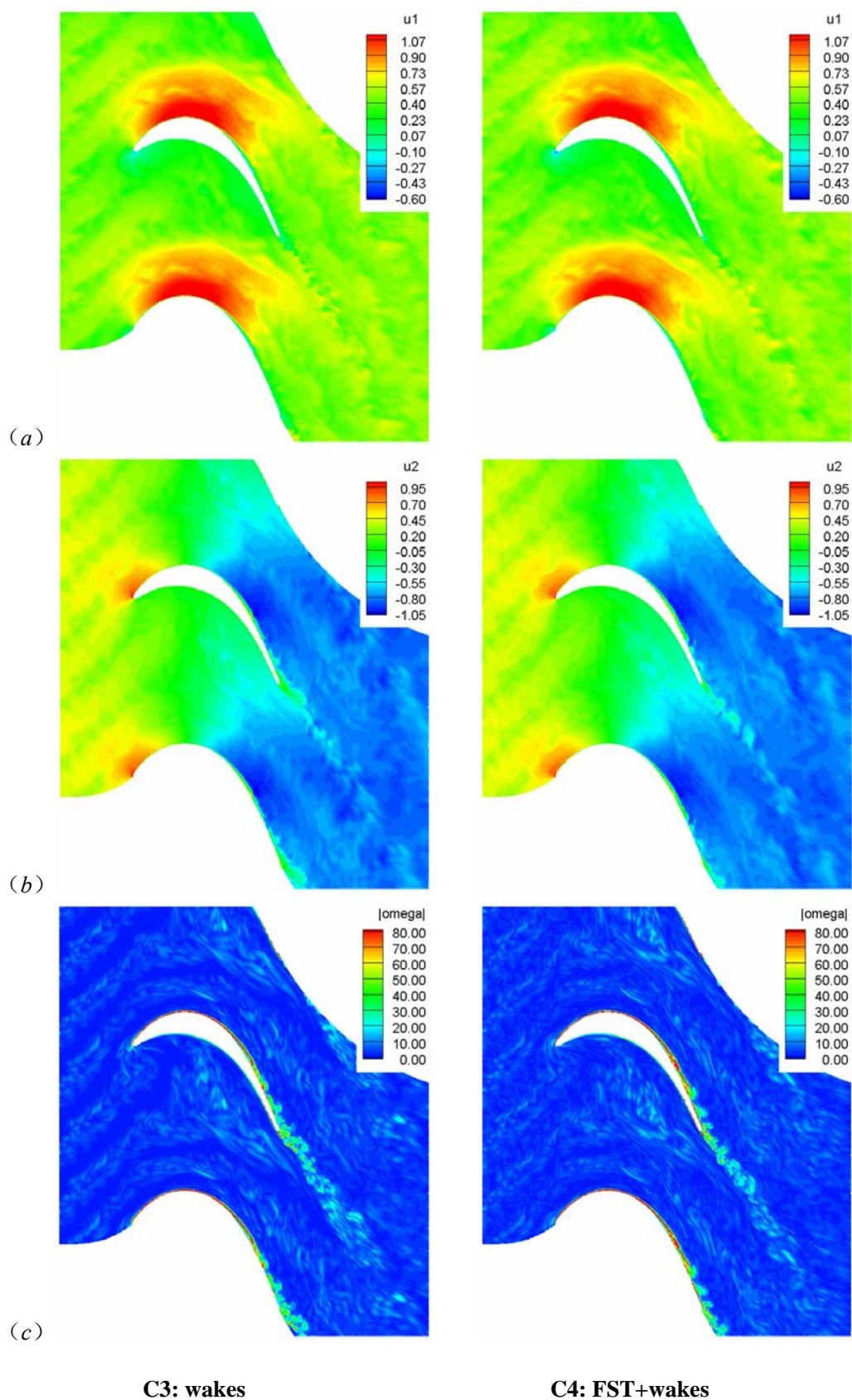


图 102 展向某一截面的瞬态流动图画, $\phi = 1/7$ 相位, C3: $t = 53.405006$ 时刻, C4: $t = 50.734756$ 时刻 (a) 速度分量 u 的云图; (b) 速度分量 v 的云图; (c) 涡量模云图

上面的分析表明：尽管存在背景湍流度引起的差异，但算例C3、C4 的处于相同相位的瞬态流场仍然非常类似，接下来便以C4 为例，继续对它的瞬态流动图画进行分析。图 102 只给出了C4 的两个速度分量及涡量模的云图，图 103 则在此基础上给出剩余的马赫数、熵增、压力、温度、总压和总温云图（同一时刻、同一个展向截面）。观察图画容易发现，压力、温度和熵增的云图与通常的想象均存在较大差异：尽管是瞬态流场，但压力和温度云图中的等值线却非常光滑，几乎看不到任何来流尾迹的“痕迹”；熵增云图中，整个叶栅通道内自由流区域的熵增很小，也看不到来流尾迹的踪影。产生这一现象的原因，可能与来流尾迹自身的特性有关：从 5.3.1 的介绍已经知道，生成进口尾迹，首先需要独立计算随时间演化的尾迹流，待其特性满足低压涡轮对来流尾迹的要求后，将冻结流场的脉动量直接添加到计算域入口（见式(5.29)）；该过程主要是从速度场的角度（如尾迹半宽、最大速度亏损等参数）考虑计算与实验条件的一致性，而对于温度、压力等热力学参数则很少关注。通过分析满足尾迹特性要求的最终流场（图 65(b)）、并和 4.2 中圆柱的尾迹流场对比发现：在两者速度亏损保持一致的前提下，虽然时间演化尾迹和真实圆柱尾迹中密度、温度、压力曲线的变化趋势一致（尾迹区密度、压力降低，温度升高），但比较其相对变化量级，前者比后者要小得多，也就是说，对于时间演化的尾迹流场，尾迹区中密度、压力、温度的数值与势流区的数值差异很小，这也就解释了为何来流尾迹对瞬态的压力和温度场几乎不产生影响。正是由于热力学参数在尾迹区变化极小，因而其熵增的数值也较小，将时间演化尾迹流的最终流场变换到涡轮叶栅的无量纲体系后，作者计算了尾迹场的熵增，发现其最大值在 0.02 左右，而图 (b) 中给出的熵增上限是 0.60，这也就解释了为何在瞬态熵增云图中来流尾迹的效应几乎不可见。除了熵增云图，剩余流动图画所表现出来的特征也与压力/温度云图有关：由于来流尾迹对温度场作用有限，马赫数云图主要受速度分量 u 和 v 的影响，比较图 (a) 和图 102 的 (a)、(b)，很容易发现这三者的相似性；又由于来流尾迹对压力/温度场作用有限，而在瞬态的总压/总温云图中却可以清晰分辨来流尾迹，因此可以得出结论——尾迹区的总压/总温损失几乎全部来自于当地的速度亏损。

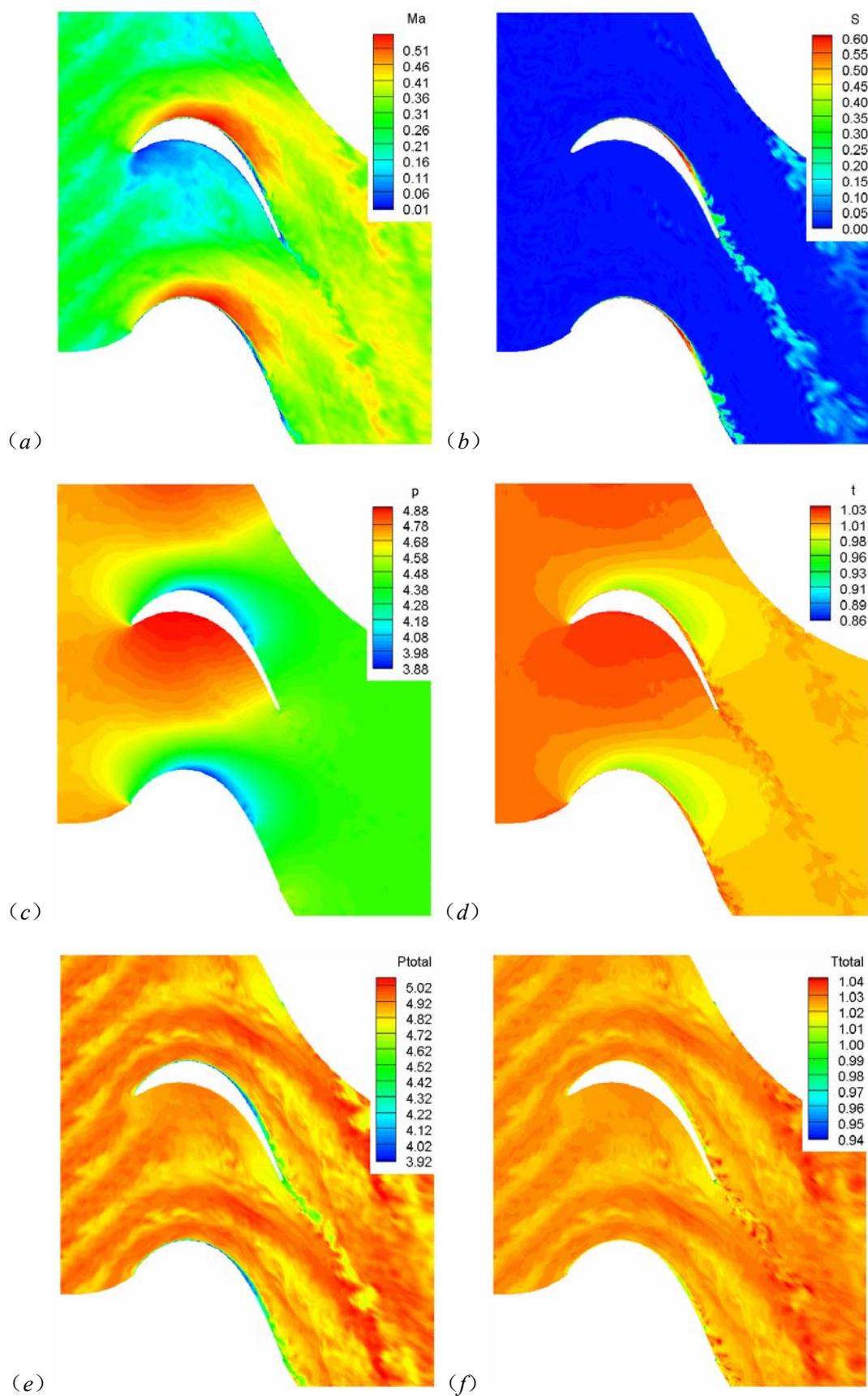


图 103 算例 C4 展向某一截面的瞬态流动图画, $\phi = 1/7$ 相位, $t = 50.734756$ 时刻 (a) 马赫数云图; (b) 熵增云图; (c) 压力云图; (d) 温度云图; (e) 总压云图; (f) 总温云图

利用瞬态流动图画，也可以对前述时均流场（见图 95）中的一些“异常”现象进行解释：在瞬态的总温总压云图中，流场中某些区域 T_t 和 p_t 的数值显然比入口测量平面位置的平均值要大，平均流场中的带状“异常”区正是它们时均效应的体现，而有关这一现象更本质的解释将在 6.5.1 给出；瞬态熵增云图中，整个叶栅通道内自由流区域的熵增很小，尾迹的效应几乎不可见，这也和时均熵增云图很好的对应在一起。瞬态和时均的熵增云图还暗示了一种可能性，即叶栅通道内的流动是接近等熵的，这也可以从另外一个方面进行论证：计算熵增时，两幅云图均使用了公式(6.3)，而熵增同样可以根据静温静压定义，这样并不会改变其数值，由于瞬态的温度和压力流场几乎不受来流尾迹的影响，这也就意味着，尾迹在叶栅通道内输运时，流场熵增的分布几乎不发生改变，由此叶栅通道内的流动接近等熵流。

总结上面的分析，采用随时间演化的尾迹流模拟涡轮叶栅的进口尾迹时，主要从速度场的角度保证了计算与实验条件的一致性，但温度、压力等热力学参数则与真实的尾迹存在一些差异，由于本文主要关心的是周期性尾迹与叶片吸力面边界层的相互作用，而该过程又主要由尾迹的速度场特性决定、与它的热力学参数关系不大，因而可以认为这种差异不会对计算结果的分析产生影响。

图 104 给出了与图 102 同一时刻 C3、C4 叶栅通道瞬态流场的大尺度相干结构，图中采用 Q 法则进行旋涡识别，均取 $Q = 6$ 的等值面。观察图画可以清晰看到通道内的周期性来流尾迹以及它们在叶栅通道内的演化，虽然由于湍流场的随机性，C3、C4 流场的细节是不同的，但因为相位相同，二者在形态上非常接近，唯一的差别在于：由于背景湍流度的效应，在相邻的尾迹之间，C4 比 C3 多了一些小尺度的结构。尾迹在通道内输运的过程中，其总体的形态以及内部的结构都发生了很多变化：进入叶栅通道前，尾迹几乎是直的，其内部多是一些小尺度结构；而进入通道后，尾迹弯曲成弓形，在弓形顶点附近变得很粗，内部的小尺度结构由于受到拉伸作用，很多都变成了细长的流向涡，从后文的分析可知，靠近吸力面的流向涡对边界层的发展有重要影响。

图 105 给出了 C3、C4 吸力面边界层的瞬态流场，图中所示为 $u = 0.2$ 的等值面，采用速度分量 v 着色，它们所处的时刻仍与图 102 相同。从这两幅图画虽然无法精确分辨吸力面分离区的位置，但却可以清晰看到层流边界层经分离、转捩而再附成湍流边界层的整个过程。分离前的层流区，等值面似乎出现了一些“褶皱”，它们在图 (b) 中更明显一些，这可能就是层流边界层中流向速度的条带结构。此外两幅图画也存在一些差别：C3 的图中，分离及再附边界层区域可以清晰看到两个展向的大尺度结构，其形态类似于展

向旋涡，C4 的图画虽然与C3 处于同一相位，却看不到这样的结构。

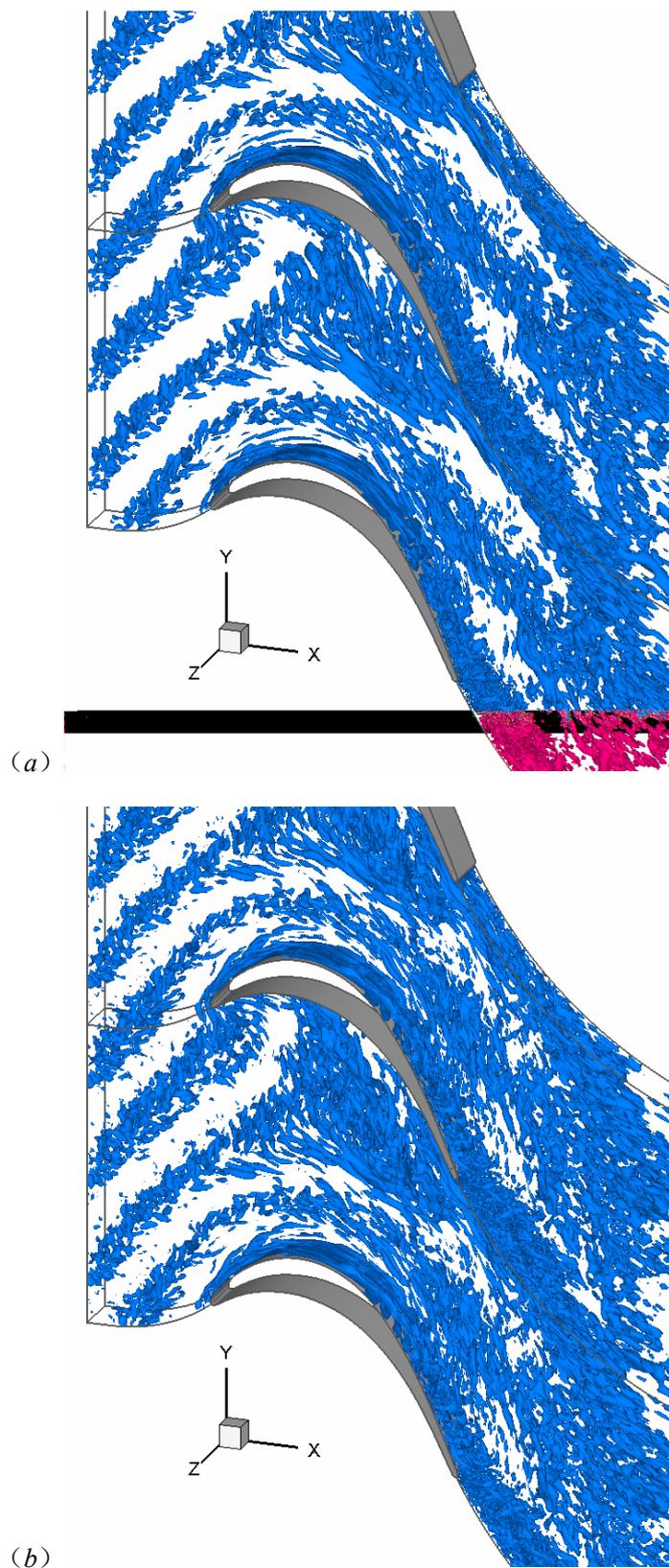


图 104 叶栅通道瞬态流场的大尺度相干结构，采用 Q 法则进行旋涡识别， $Q = 6$ 等值面， $\phi = 1/7$ 相位 (a) C3: wakes, $t = 53.405006$ 时刻; (b) C4: FST+wakes, $t = 50.734756$ 时刻

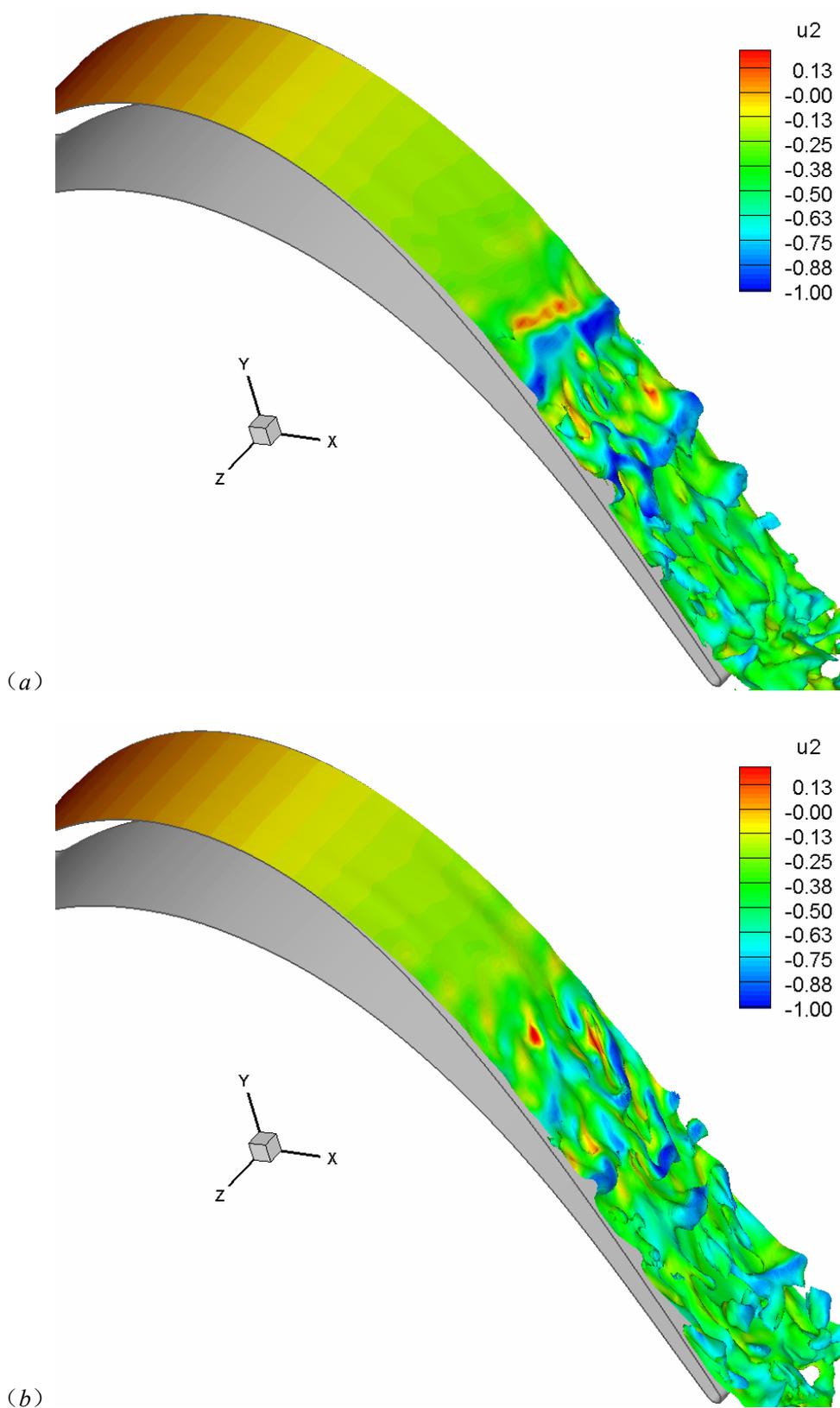
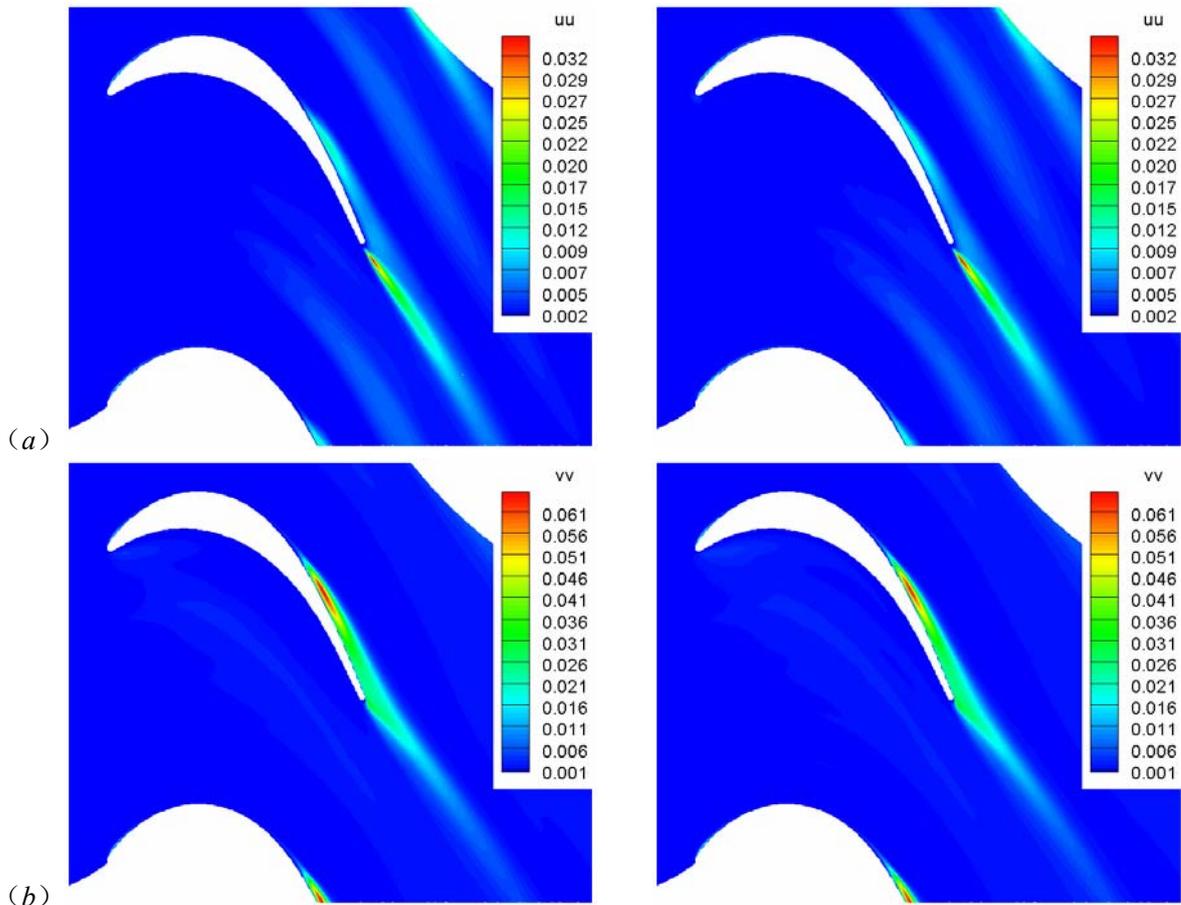


图 105 吸力面边界层的瞬态流场， $u = 0.2$ 等值面，采用速度分量 v 着色， $\phi = 1/7$ 相位 (a) C3: wakes, $t = 53.405006$ 时刻; (b) C4: FST+wakes, $t = 50.734756$ 时刻

6.4 高阶统计量

图 106 给出了算例 C3、C4 二阶统计量的对比，其中 (a) ~ (e) 分别为雷诺应力 $\overline{u'u'}$ 、 $\overline{v'v'}$ 、 $\overline{w'w'}$ 、 $\overline{u'v'}$ 和湍动能 $k = (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})/2$ ，为了便于比较，对应云图中统计量的取值范围保持一致。对比两个算例容易发现，所有统计量的云图在形态上都非常相似，唯一的差别似乎是 C3 中各统计量的极值比 C4 的稍大，这又一次说明流场的演化过程主要受周期性尾迹控制，而背景湍流度的效应则非常有限。观察各云图还可以看出：对于雷诺正应力 $\overline{u'u'}$ 、 $\overline{v'v'}$ 、 $\overline{w'w'}$ 和湍动能 k ，它们都主要分布在分离后的吸力面边界层以及叶片的尾迹区，其中 $\overline{v'v'}$ 、 $\overline{w'w'}$ 和 k 的最大值均位于时均分离泡的再附点附近；雷诺切应力 $\overline{u'v'}$ 则主要分布在分离后的吸力面边界层，尾迹区中并不显著，其极小值也位于时均再附点附近。众所周知，大的湍能生成意味着大的损失，统计量的这种分布表明流场的最大损失集中在时均分离泡的再附点附近，这就印证了图 99 (f) 中的耗散系数曲线，另外，C3 的统计量极值较 C4 的稍大表明 C3 的损失比 C4 更大，这也和前文的结论一致。



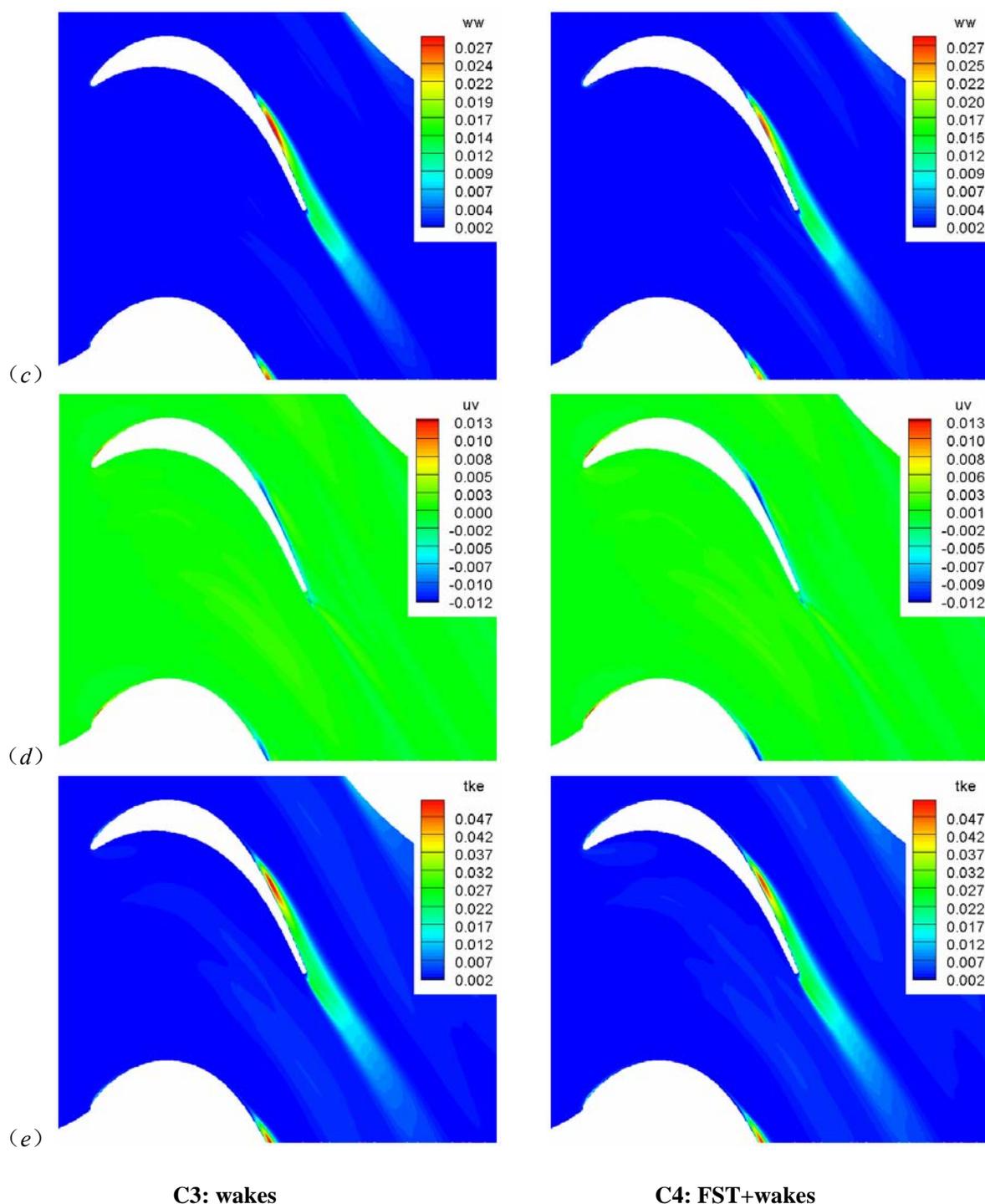


图 106 二阶统计量的对比 (a) 雷诺应力 $\overline{u'u'}$; (b) 雷诺应力 $\overline{v'v'}$; (c) 雷诺应力 $\overline{w'w'}$; (d) 雷诺应力 $\overline{u'v'}$; (e) 湍动能 $(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})/2$

雷诺应力的定义通常是和坐标系相关的, 图 106 中的各高阶统计量均来源于低压涡轮坐标系, 但对于分离后的吸力面边界层而言, 流动方向并不与 x 轴平行, 这种情况下采用当地坐标系定义雷诺应力似乎更有利于流动的分析, 此外, 如 6.2.2 所述, 计算耗散系数 C_D 也需要用到当地坐标系下的 $\overline{u'v'}$ 值。下面首先推导雷诺应力在两个坐标系之

间的变换关系。

从直角坐标系 $O-xyz$ 变换到吸力面当地的切向-法向坐标系 $O-tnz$ ，由于两坐标系展向 z 一致，因而只需考虑从 xOy 到 tOn 的二维变化。对于任意一个二维的脉动速度向量，假设其在 xOy 和 tOn 内分别表示为 (u', v') 和 (u_1', v_1') ，又假设吸力面当地的单位切向和法向矢量分别为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 \boldsymbol{n} ，在 xOy 内有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} &= (n_x, n_y) \\ \boldsymbol{\tau} &= (n_y, -n_x)\end{aligned}\quad (6.13)$$

容易推导得到以下雷诺应力的变换关系：

$$\overline{u_1'^2} = n_y^2 \overline{u'^2} + n_x^2 \overline{v'^2} - 2n_x n_y \overline{u'v'} \quad (6.14)$$

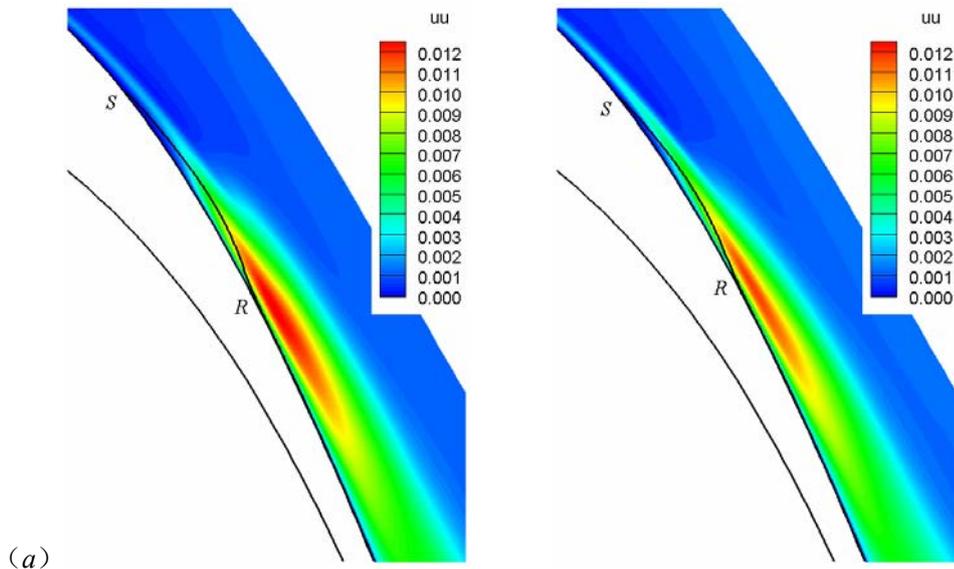
$$\overline{v_1'^2} = n_x^2 \overline{u'^2} + n_y^2 \overline{v'^2} + 2n_x n_y \overline{u'v'} \quad (6.15)$$

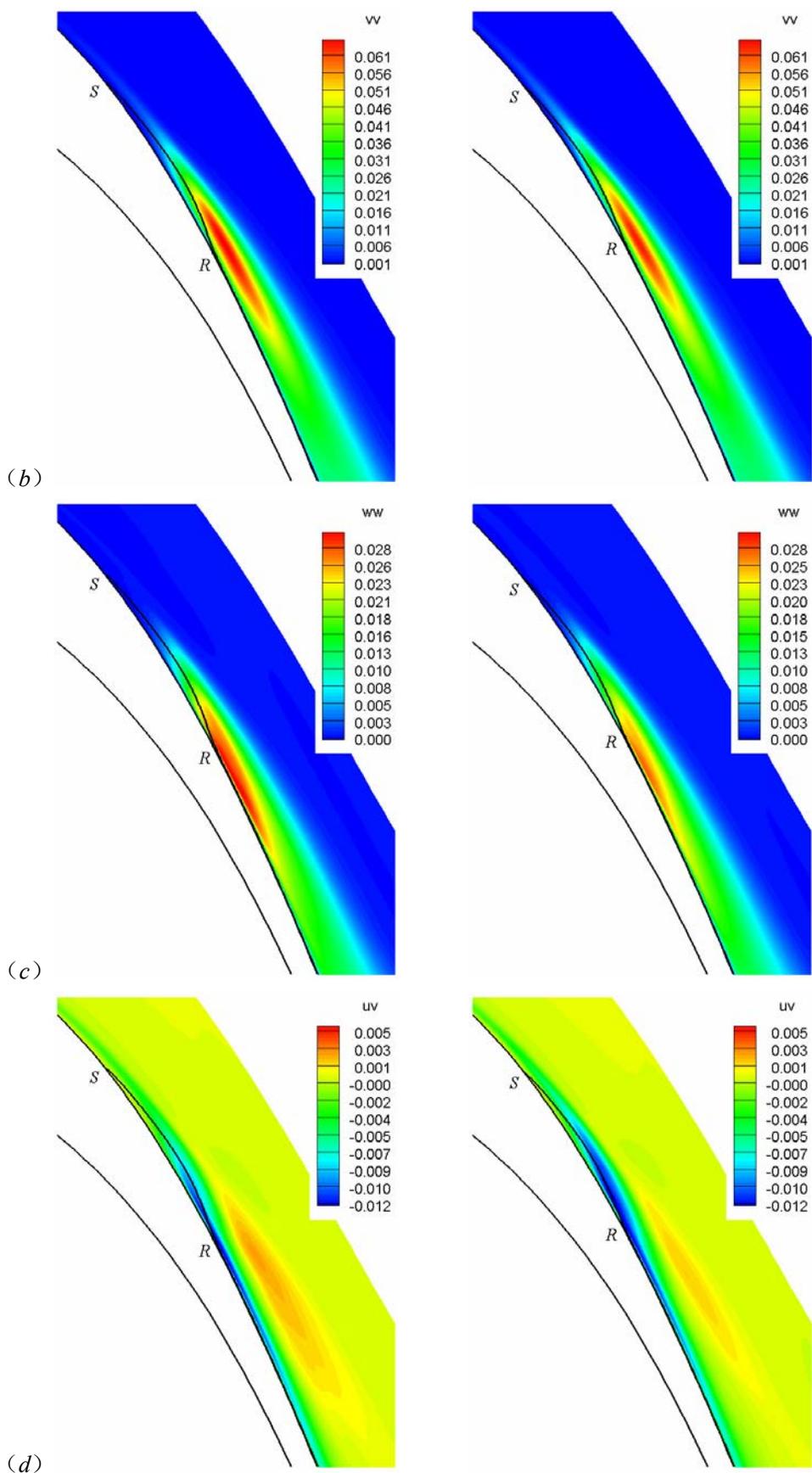
$$\overline{u_1'v_1'} = n_x n_y (\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) + (n_y^2 - n_x^2) \overline{u'v'} \quad (6.16)$$

将式(6.14)和(6.15)相加，可以得到：

$$\overline{u_1'^2} + \overline{v_1'^2} = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} \quad (6.17)$$

上面的式子表明，雷诺应力的定义确实是依赖于坐标系的，而湍动能则与坐标系无关。利用上述变换关系，图 107 给出了吸力面分离及再附区当地坐标系下二阶统计量的云图，其中 (a) ~ (e) 分别为雷诺应力 $\overline{u'u'}$ 、 $\overline{v'v'}$ 、 $\overline{w'w'}$ 、 $\overline{u'v'}$ 和湍动能 k ，图中所示流线近似为时均分离泡的分界流线。同图 106 一样，C3、C4 的云图在形态上都非常相似，且 C3 的极值较 C4 的稍大，从这些放大的图画上也可以看到，无论雷诺应力还是湍动能，其极值都位于时均分离泡的再附点附近。





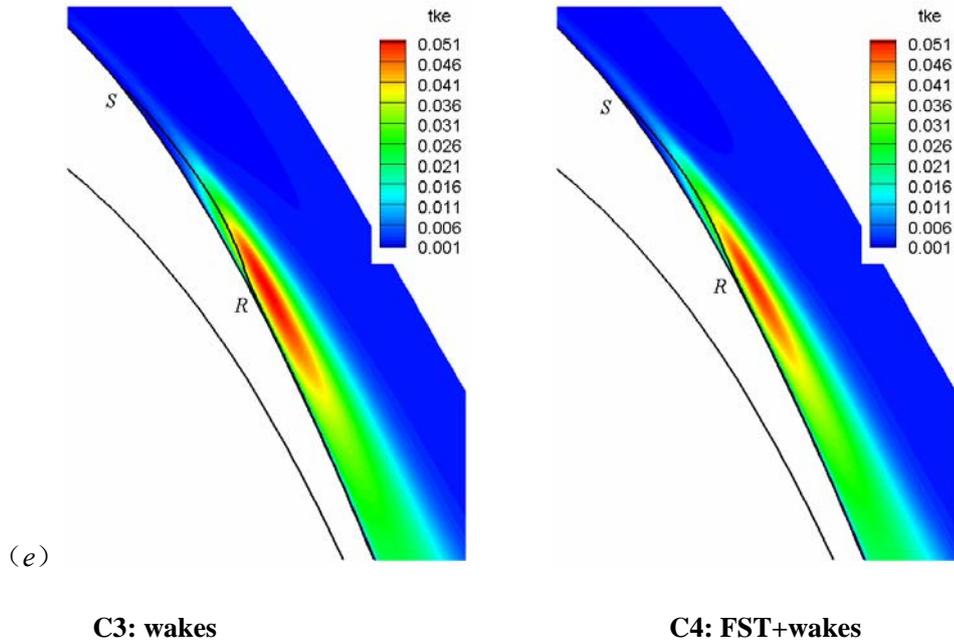


图 107 吸力面当地坐标系下二阶统计量的对比 (a) 雷诺应力 $\overline{u'u'}$; (b) 雷诺应力 $\overline{v'v'}$; (c) 雷诺应力 $\overline{w'w'}$; (d) 雷诺应力 $\overline{u'v'}$; (e) 湍动能 $(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})/2$

6.5 尾迹在叶栅通道内的输运

要研究上游尾迹与吸力面边界层的相互作用，首先必须详细了解尾迹在叶栅通道内的输运过程，本节即从时均流动图画和瞬态流动图画两个方面对尾迹在叶栅通道内的运动进行分析。

6.5.1 相均流动图画

图 108 给出了算例 C3、C4 同一相位 ($\phi = 1/7$) 流场的对比，图中所示为相位平均的展向涡量及扰动速度矢量。观察图画可以发现，利用展向涡量能够很好的识别来流尾迹，由于速度亏损，尾迹表现为一正一负的两个相邻涡层，此外，图中的扰动速度矢量也清晰的展示了尾迹区的逆射流，由于两个算例的流场非常接近，因此下文仅以 C4 的结果为例进行分析。图 109 是算例 C4 在一个周期内的相位平均流场，其中 (a) ~ (g) 分别对应相位 $\phi = 1/7 \sim 7/7$ 。按照 Meyer 的观点^[205]，尾迹在叶栅通道内的输运过程中存在弯曲、再定向、拉长和拉伸等现象，1.3.2 也据此对图 8 中的尾迹输运图画进行了描述，但比较图 8 和这里的结果可以发现，二者存在非常明显的差别：首先，C4 中叶栅通道内尾迹的密度远高于图 8；其次，尾迹在通道内弯曲成弓形，C4 的弓形区靠近压力面，图 8 的则在吸力面一侧；再次，C4 的尾迹以几乎平行于叶片的角度掠过吸力面，图 8 中尾迹对吸力面的作用则主要通过一对反向旋转的涡对体现；最后，C4 中的反向旋转

涡对出现在压力面附近，图 8 中靠近压力面的则是受到拉伸且发生再定向的尾迹。分析产生这些差异的原因，主要是由于本文对照实验中上游圆柱的运动速度太低，导致叶栅的流动系数（flow coefficient，或velocity coefficient） ϕ 偏高：

$$\phi = \frac{U_{in} \cos \beta_1}{U_b} = \frac{0.775405 \cdot \cos 41^\circ}{0.152438} \approx 3.84 \quad (6.18)$$

由于 U_{in} 的估值偏大，C3/C4 实际的 ϕ 值在 3 左右，这一数值大约是低压涡轮典型流动系数的 3 倍，实验中为保证尾迹的折合频率（reduced frequency）具有代表性，减小了圆柱的栅距，因此通道内尾迹的密度远高于图 8；也正是由于流动系数低，尾迹沿 $-y$ 方向的运动速度小，当尾迹的下游部分被叶片前缘切割时，上游部分还远离叶栅通道，此后的很长一段时间也都不受叶栅影响，因此其弓形区靠近压力面，在压力面附近形成反向旋转的对涡，而尾迹的上游部分最后以几乎平行于叶片的角度掠过吸力面。

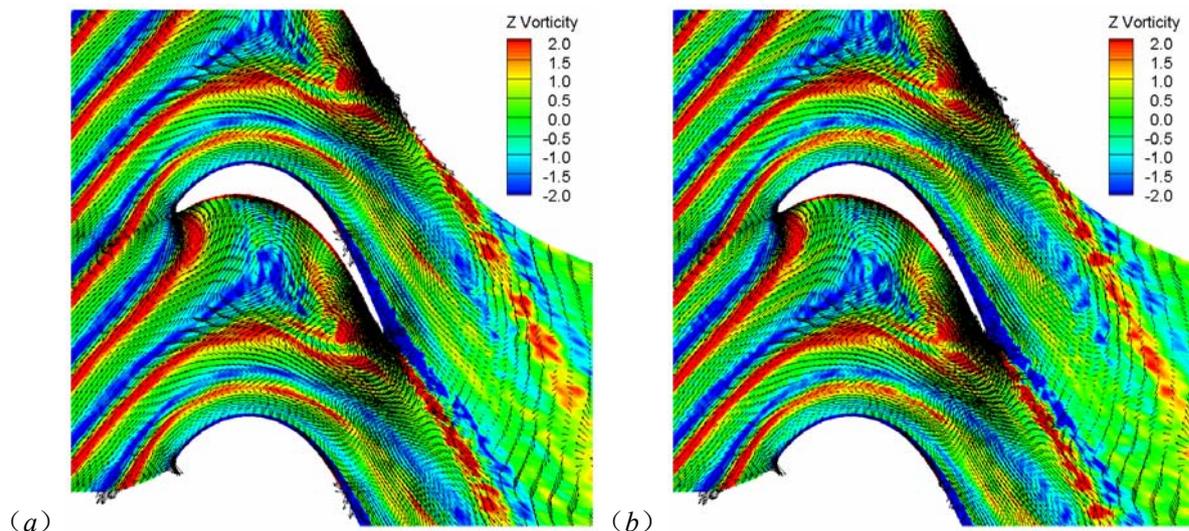
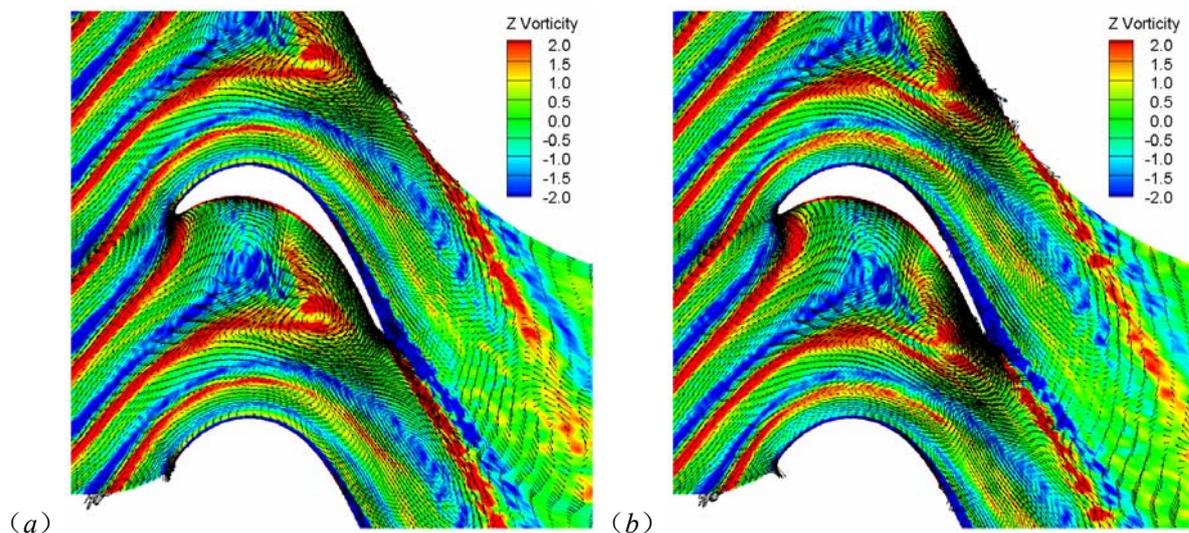


图 108 相位平均的展向涡量-扰动速度图， $\phi = 1/7$ 相位 (a) 算例 C3; (d) 算例 C4



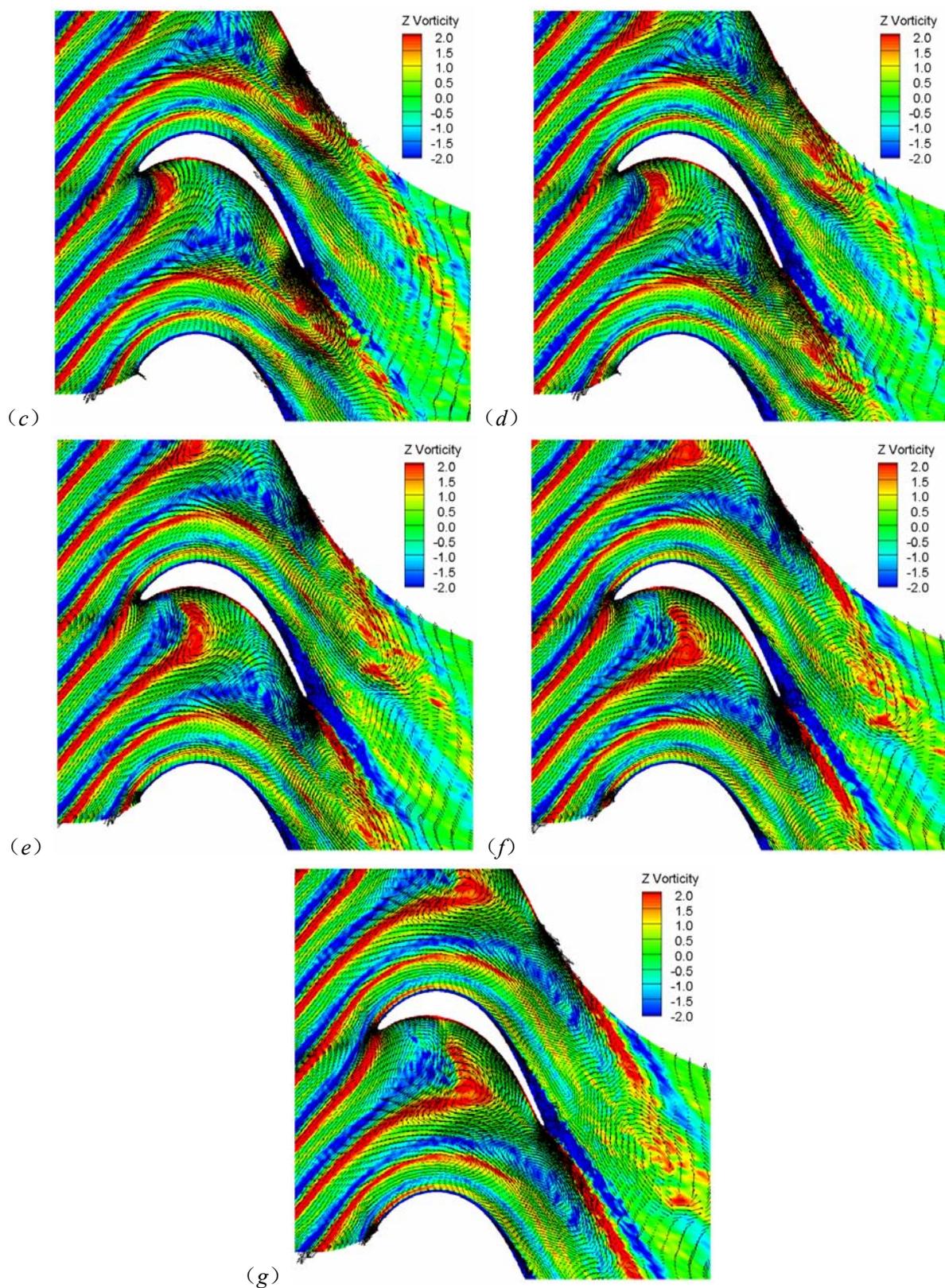


图 109 尾迹在叶栅通道内的运动, 算例 C4 的相均流场 (a) $\phi = 1/7$; (b) $\phi = 2/7$; (c) $\phi = 3/7$; (d) $\phi = 4/7$; (e) $\phi = 5/7$; (f) $\phi = 6/7$; (g) $\phi = 7/7$

接下来对时均和瞬态流动图画中均有出现的总温总压“异常”现象进行解释, 按照

文献 [352] 的观点, 这一问题可以从两个方面来理解。首先介绍第一种, 如图 109 所示, 尾迹在叶栅通道内运动时, 受到主流的作用, 其尺寸会发生变化: 弓形区的顶点附近, 主流流场的拉伸方向与尾迹主轴方向接近垂直, 尾迹在拉伸作用下变短变粗, 逆射流变强; 除弓形区以外的其他大部分区域, 主流场的拉伸方向近似与尾迹主轴方向平行, 尾迹在拉伸作用下变长变细, 逆射流减弱, 逆射流强度的这种变化可以用开尔文定理 (环量守恒) 进行解释。从 6.3 对瞬态流动图画的分析又已经知道, 瞬态压力/温度场中几乎见不到尾迹的效应, 也就是说, 尾迹区内外, 压力/温度场的分布是连续且光滑的, 逆射流增强的区域, 其总压/总温必定减小, 逆射流减弱的区域, 其总压/总温必然增大。又由于逆射流增强的弓形区近似位于通道中部, 其两侧的逆射流均有减弱趋势, 这也就解释了图 95 中总压/总温异常区的分布: 通道中部的总压/总温偏低, 靠近叶片的两个带条区域总压/总温偏高。

接下来介绍第二种解释^{[352][353]}, 众所周知, 静压脉动会造成无粘流动中流体微团总焓的改变:

$$\frac{Dh_0}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6.19)$$

而热力学第二定律则将总压和总焓联系起来:

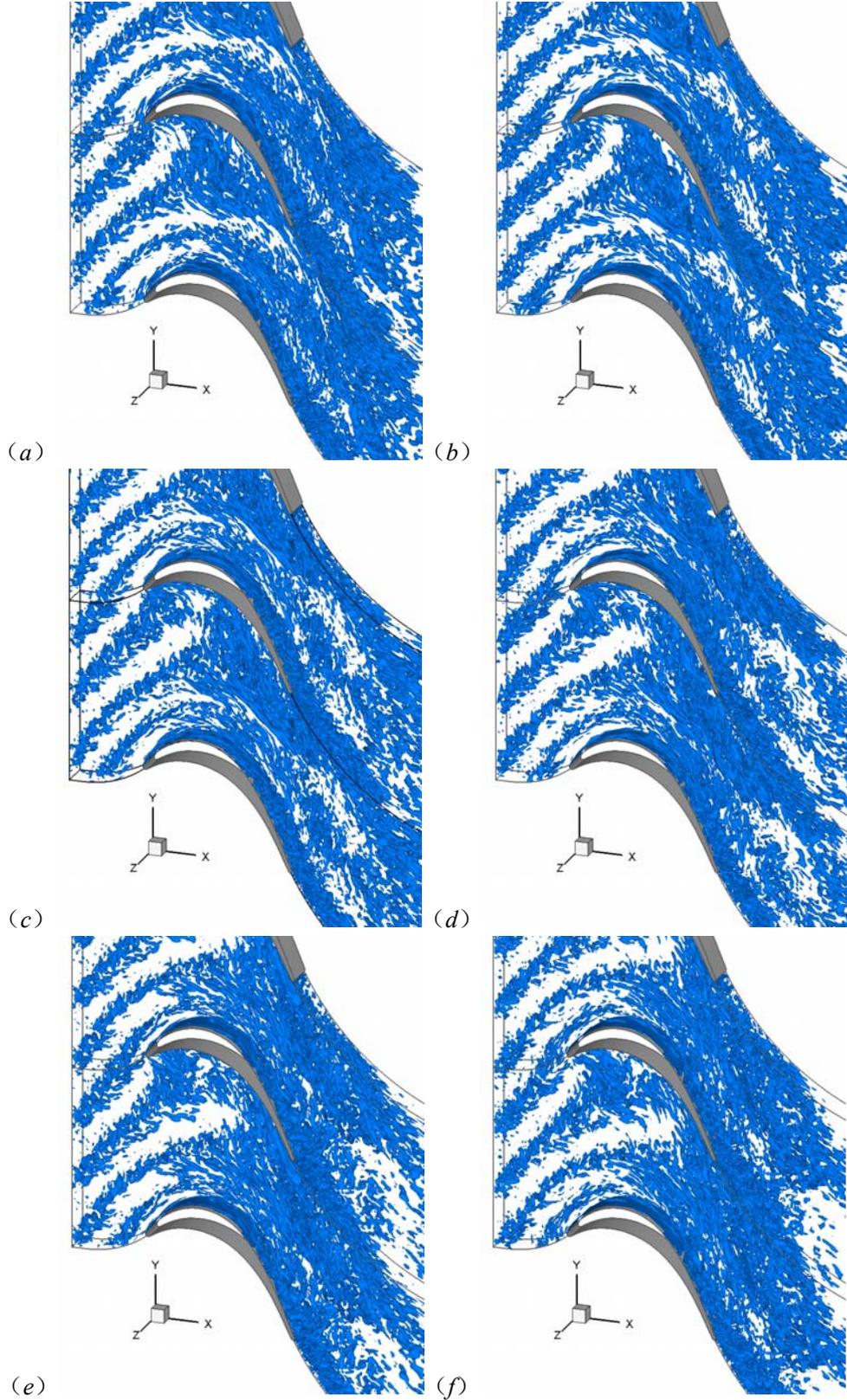
$$T_0 ds = dh_0 - \frac{1}{\rho_0} dp_0 \quad (6.20)$$

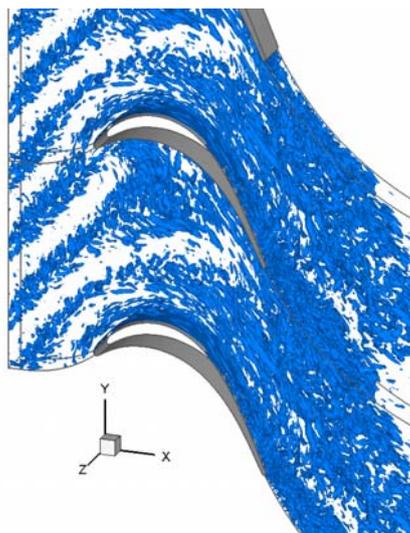
从上面两个式子可以看出, 压力脉动 $\partial p / \partial t$ 不但影响总温的变化, 而且可以通过总焓的改变影响总压; 对于非定常的流场, 即使流动是等熵的, 总焓 (总温) 和总压也不一定保持不变; 特殊情况下, 总温的变化可以在不影响热力损失的条件下产生对应的总压变化, 这就是所谓的能量分离 (energy separation) 现象。前已述及, 叶栅通道内的流动几乎是等熵的, 如果压力脉动 $\partial p / \partial t$ 导致总温的改变, 根据式(6.20), 它必然也会导致总压的改变, 也就是说, 总温和总压的变化总是同步的, 这也就解释了时均/瞬态流动图画中总温和总压异常区的相似性。按照异常区的分布规律, 叶栅通道的中部区域, 总温总压偏低, 压力脉动的总效果应满足 $\partial p / \partial t < 0$, 叶片两侧的区域, 总温总压偏高, 压力脉动则需要满足 $\partial p / \partial t > 0$ 。

6.5.2 瞬态流动图画

图 110 给出了算例 C4 在一个周期内的瞬态流场, 图中所示为瞬态场的大尺度相干结构, 采用 Q 法则进行旋涡识别 ($Q = 6$), 其中 (a) ~ (g) 分别对应相位 $\phi = 1/7 \sim 7/7$ 。从

图中容易看出，来流尾迹内部多是一些小尺度结构，进入叶栅通道后，在主流场的拉伸作用下，形成了大量的流向涡：弓形区域中，流向涡方向与尾迹主轴近似垂直，其他大部分区域，流向涡近似沿尾迹主轴方向，特别是对于靠近吸力面的尾迹，其主轴几乎与叶片平行，该尾迹中的流向涡也近乎平行的掠过叶片表面。





(g)

图 110 尾迹在叶栅通道内的运动，算例 C4 的瞬态流场，采用 Q 法则进行旋涡识别， $Q = 6$ 等值面
 (a) $\phi = 1/7$, $t = 50.734756$; (b) $\phi = 2/7$, $t = 51.116220$; (c) $\phi = 3/7$, $t = 51.497684$;
 (d) $\phi = 4/7$, $t = 51.879149$; (e) $\phi = 5/7$, $t = 52.260613$; (f) $\phi = 6/7$, $t = 52.642077$;
 (g) $\phi = 7/7$, $t = 53.023542$

6.6 尾迹诱导的分离流转捩机理

完成上述各节的分析后，本节开始研究尾迹与吸力面分离边界层的相互作用机理，按照 1.5 节的分类方法，这里的问题应该属于“尾迹诱导的分离流转捩”，即转捩发生在分离区的自由剪切层中，但是，从 6.2.2 的分析已经知道，C3、C4 在时均分离点处的动量厚度雷诺数刚好超过 $90 \sim 150$ 这一量级，因此，尾迹作用下，分离点之前的附着流存在转捩的可能性，真实的情况如何还需要进一步分析。此外，如果转捩发生在分离区的自由剪切层中，到目前为止，除 Yaras 等^{[230][231][232][233]}的研究工作外，似乎还没有人直接观察到分离剪切层中的湍流斑，对于本文的算例，湍流斑是否存在，如果存在其形态如何，显然都是需要解答的问题。

6.6.1 吸力面边界层的时空演化图景

本部分主要从相位平均的流场出发，研究吸力面边界层在周期性尾迹作用下的演化规律。图 111 给出了算例 C3、C4 壁面剪切应力 τ_{wall} 的时空图，其横坐标代表叶片吸力面的长度，纵坐标代表尾迹通过的周期，图中两条竖直虚线分别对应时均的分离/再附位置，实线则是 $\tau_{wall} = 0$ 的等值线，显然，该等值线所包围的区域就是相均流场的分离区。比较 C3、C4 的图画可以发现：二者在形态上非常接近，除了 τ_{wall} 的时空图，吸力面边界层其它参数的图画也存在类似情况，因此在后文的分析中，主要以 C4 的结果为例，

而不再另外给出C3 的图画作为对比。

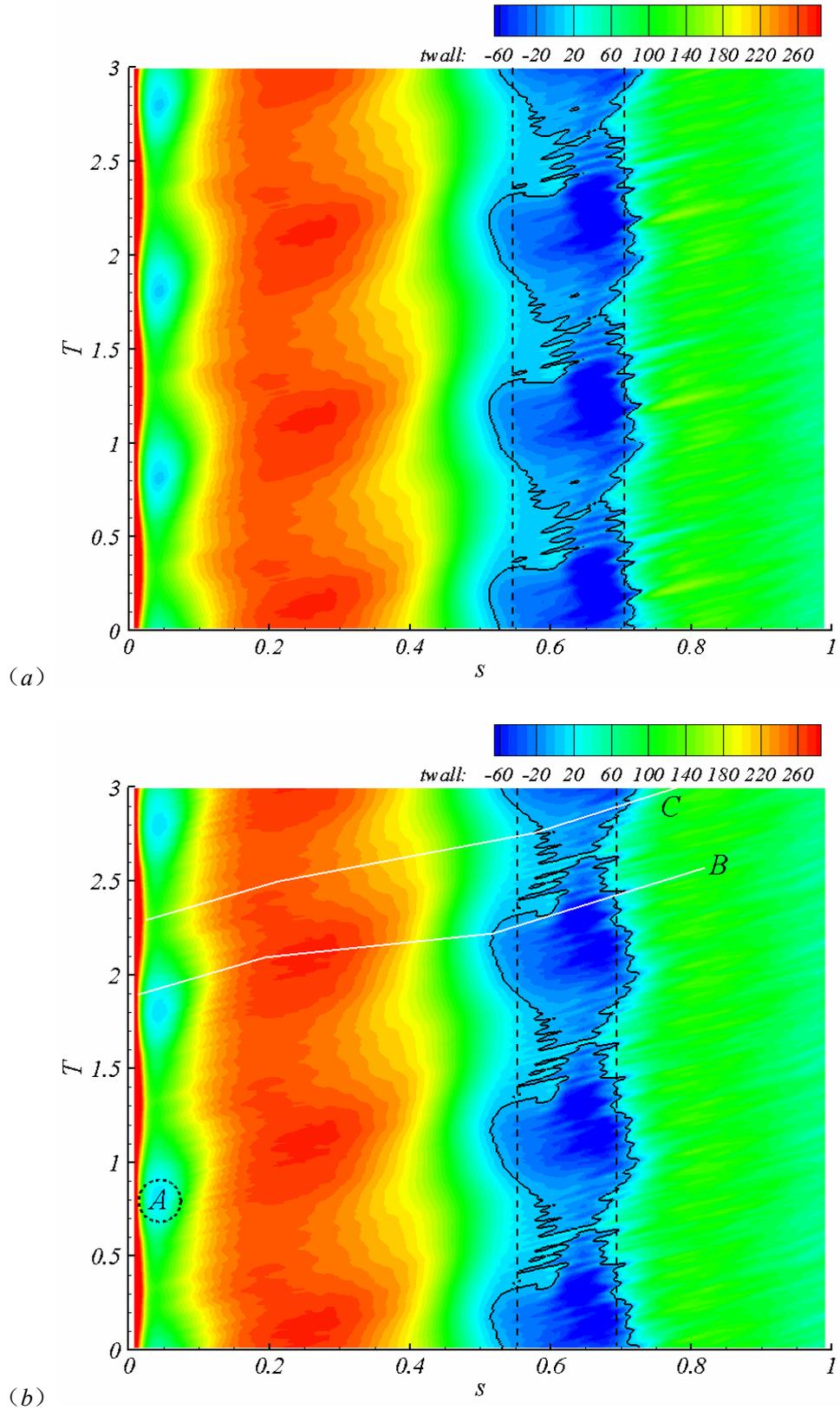
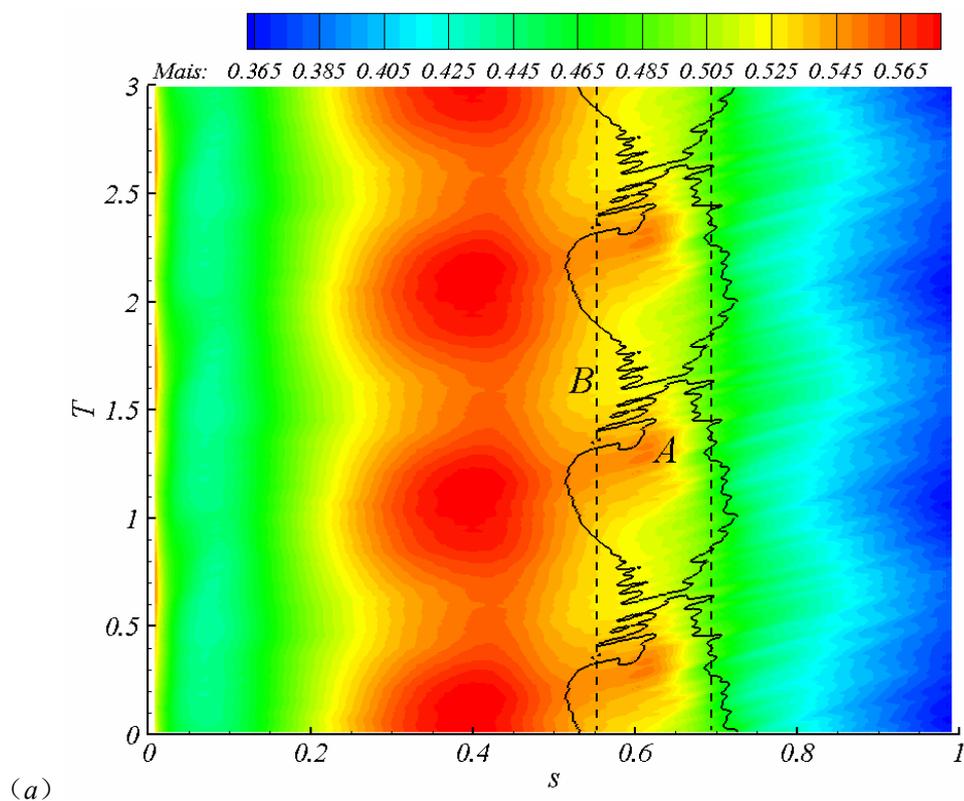
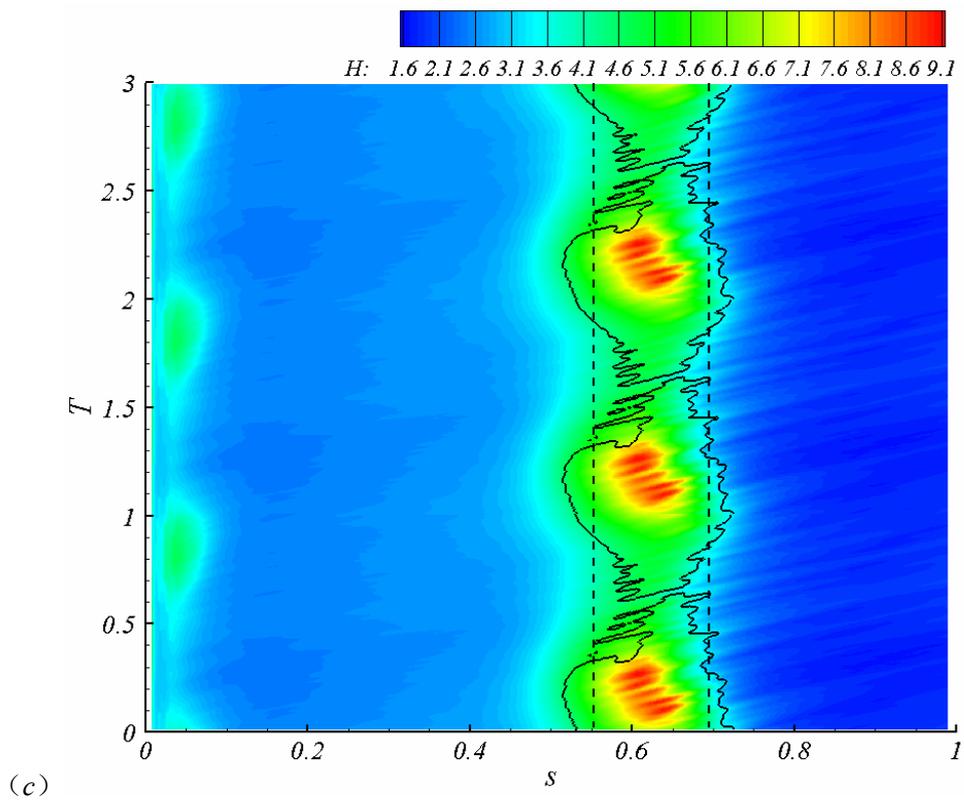
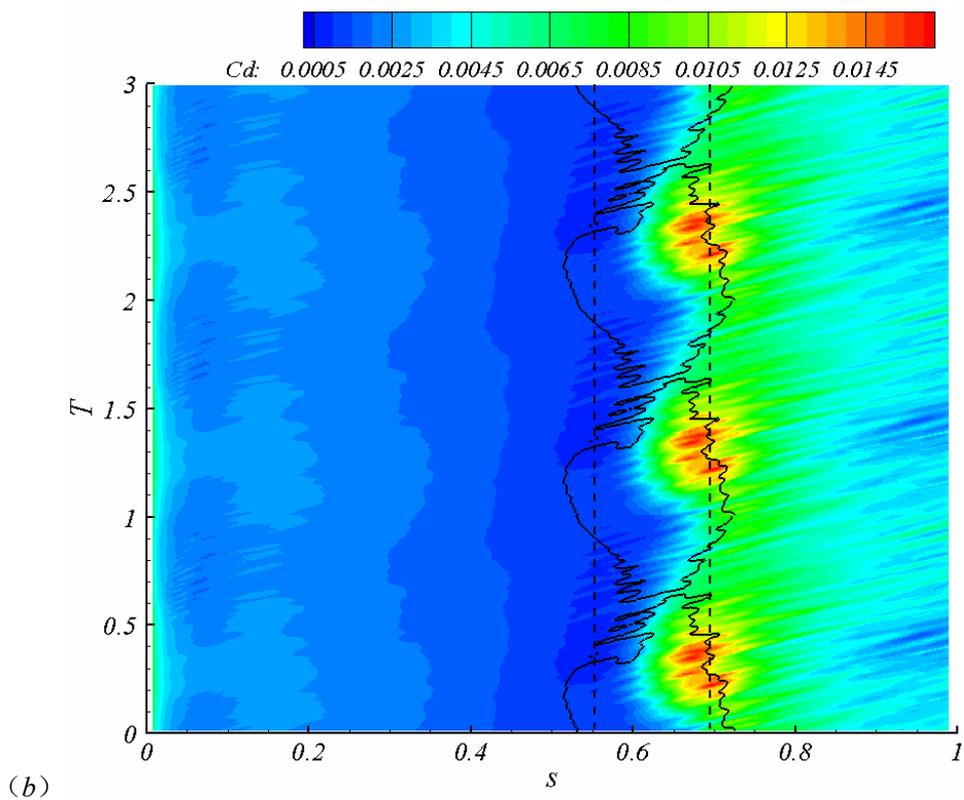


图 111 相位平均流场（吸力面）壁面剪切应力 τ_{wall} 的时空图，两条竖直虚线分别代表时均的分离/再附位置，实线为 $\tau_{wall} = 0$ 的等值线 (a) 算例 C3; (b) 算例 C4

要想对吸力面边界层的发展演化过程有深刻的认识，单靠壁面剪切应力的时空图是远远不够的，图 112 据此给出了算例C4 中边界层其它参数的时空图，其中 (a) ~ (d) 分别对应叶片表面等熵马赫数 Ma_{is} 、耗散系数 C_D 、形状因子 H 和动量厚度雷诺数 Re_θ ，为便于分析，图中仍然画出了时均的分离/再附位置以及相均流场的分离区。从前文对尾迹在叶栅通道内输运过程的叙述已经知道，由于上游圆柱的运动速度极低，导致叶栅的流动系数偏高，尾迹以几乎平行于叶片的角度掠过吸力面；此外，为保证尾迹的折合频率具有代表性，上游圆柱的栅距很小，因此通道内尾迹的密度很高，这两个因素都导致一个问题：对于本文的算例，很难找到相对精确的方法确定尾迹与吸力面边界层发生作用的具体位置。当然，尾迹的周期性使得所有的相均时空图都呈现出规则的周期变化，利用这些图画，可以大致确定尾迹扫过叶片吸力面的轨迹。比如图 111 (b) 中，相均的分离点绕时均分离位置前后移动，尾迹作用下，分离点后移，由此尾迹的轨迹必然经过该区域；又如在前缘附近，剪切应力的极小值位于区域A，尾迹到来后，该区域消失，尾迹离开后又再次出现，尾迹的轨迹显然也会经过极小值之间的区域，将这些离散的轨迹点连接起来，于是图中B、C两条折线之间的区域就可以近似看作尾迹与吸力面边界层的作用域。在该区域内，如果固定一个时刻，可以发现叶片表面很大部分的面积都同时受到尾迹的影响，而如果固定一个位置，则会发现尾迹通过该位置的时间很长。





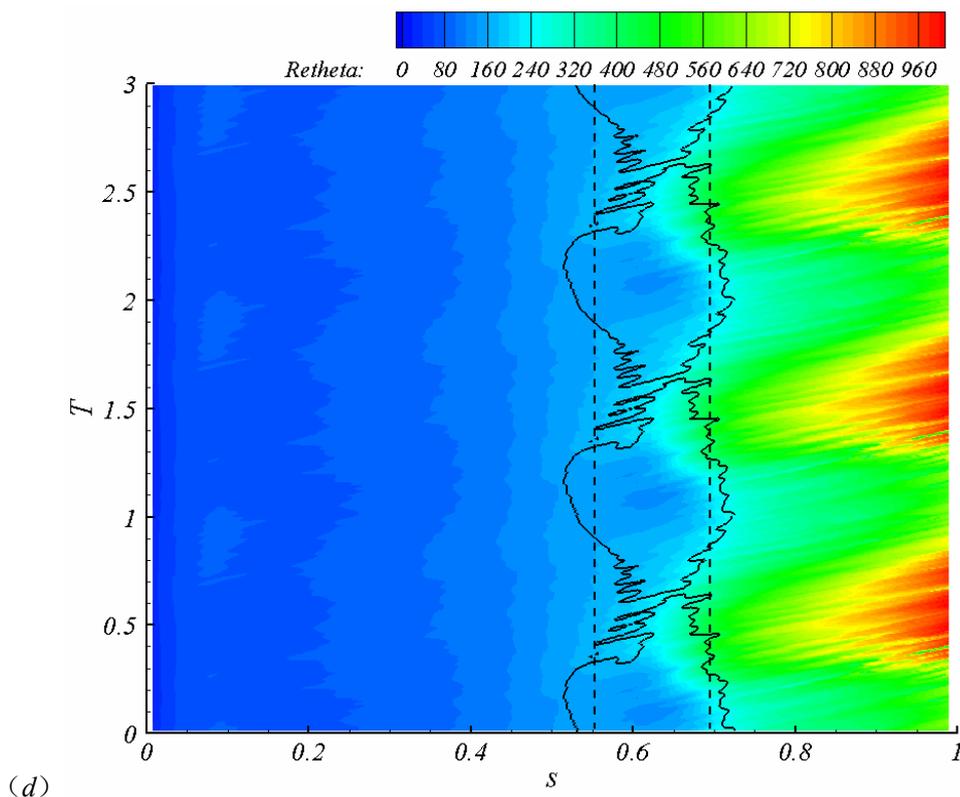


图 112 算例 C4 相位平均流场中吸力面边界层不同参数的时空图, 两条竖直虚线分别代表时均的分离/再附位置, 实线包围区域为相均流场的分离区 (a) 叶片表面等熵马赫数 Ma_{is} ; (b) 耗散系数 C_D ; (c) 形状因子 H ; (d) 动量厚度雷诺数 Re_θ

近似确定尾迹的运动轨迹后, 观察图 112 (a), 容易发现, 尾迹通过时, 等熵马赫数的峰值减小, Ma_{is} 在时均分离点附近 (图中点 B) 的过渡也较为平缓, Ma_{is} 峰值的减小可能和尾迹区的逆射流有关, 等值线过渡平缓则是由于分离泡受到了抑制; 作为对比, 图中点 A 附近存在一个明显的压力平台, 再朝向下游 Ma_{is} 的数值突然下降, 这是层流分离泡中的典型现象, 发生的时间恰在尾迹通过的间隙。接下来观察耗散系数 C_D 的时空图, 如图所示, C_D 的极大值位于层流分离泡的再附点附近, 尾迹通过时, 分离泡几乎消失, 流动的损失也大大降低。对于动量厚度雷诺数 Re_θ 的图画, 层流分离泡分离点前的 Re_θ 在 145 左右, 而尾迹作用区域的分离点前, Re_θ 接近 180, 这表明, 尾迹作用条件下, 转捩点的位置既可能在相均的分离点之后, 也可能在分离点之前。

图 113 给出了算例 C4 相位平均流场中吸力面分离泡的演化, 其中 (a) ~ (g) 分别对应相位 $\phi = 1/7 \sim 7/7$ 。事实上, 这里的图画是和图 111 (b) 中壁面剪切应力的时空图完全对应在一起的, 由图 111 (b) 可知, 最大的相均分离泡出现在 $t \approx 0.17T$ 时刻, 即 $\phi = 1/7$ 相位以后。尾迹作用下, 分离泡受到抑制, 尺寸变小, 分离剪切层与尾迹的相互作用导

致卷起涡的出现，如图 (c) 和图 (e) 所示；尾迹离开后，在逆压梯度作用下，分离泡逐渐恢复，尺寸持续增加，直到下一个尾迹的来临。

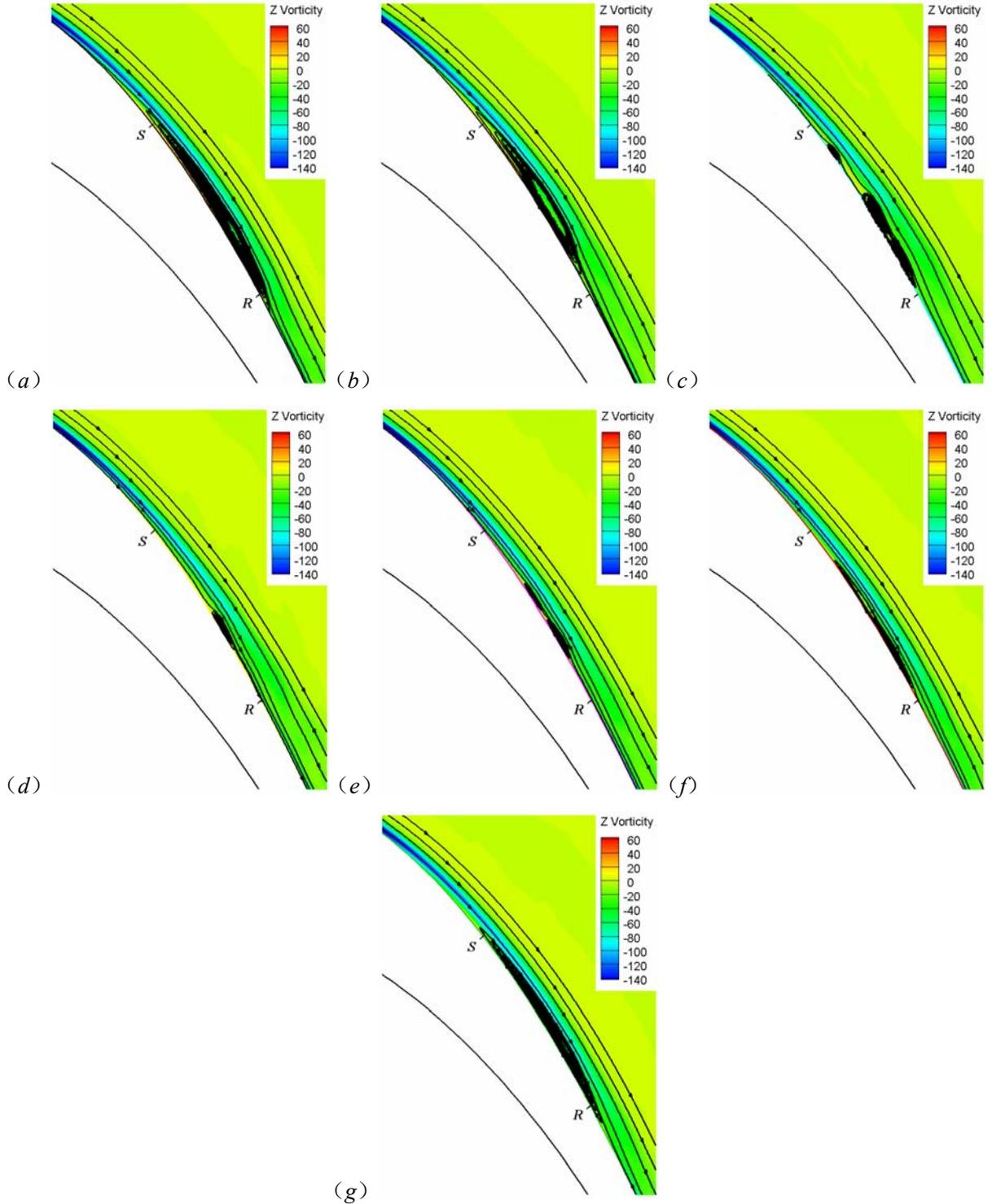
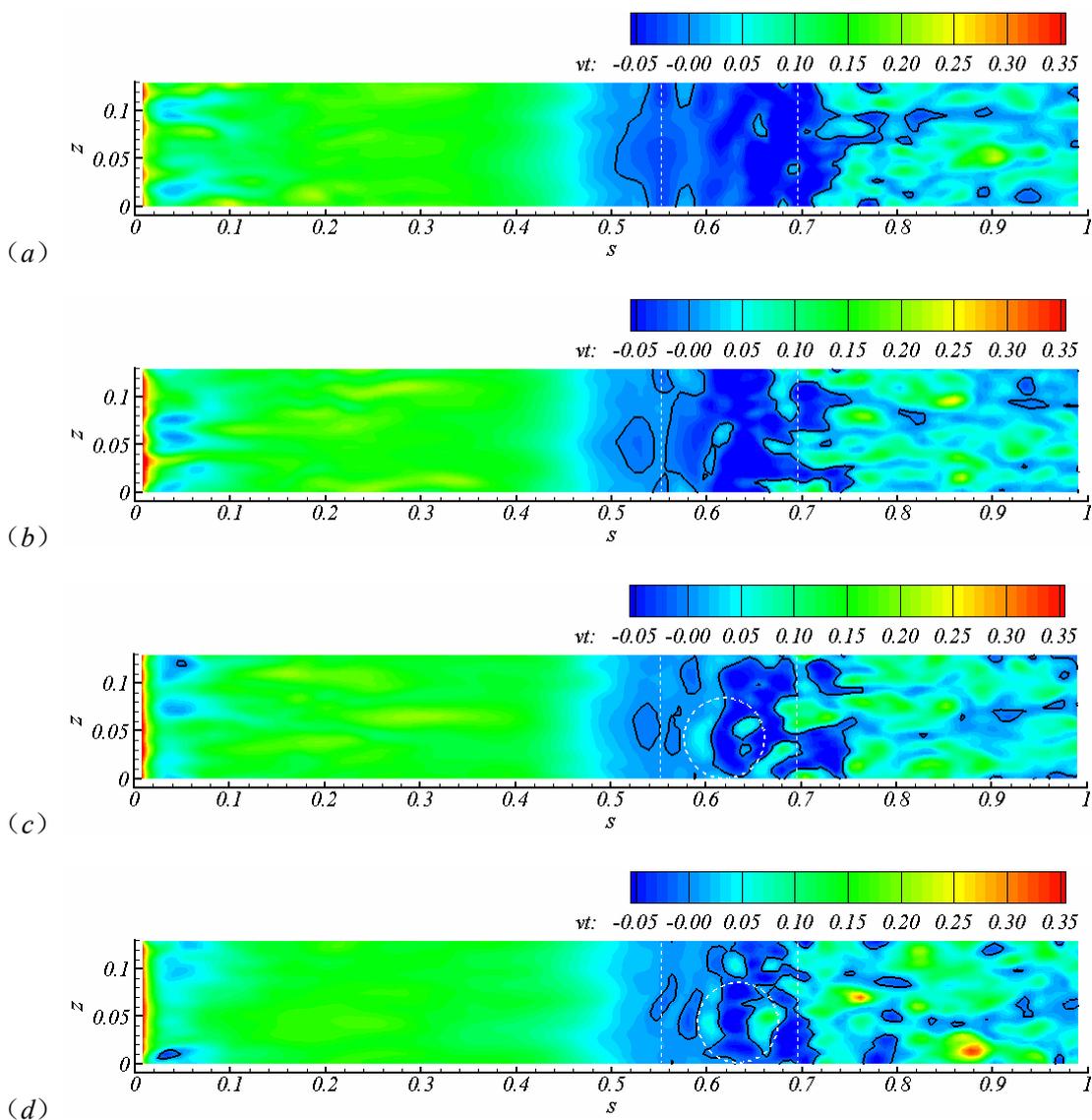


图 113 算例 C4 相位平均流场中吸力面分离泡的演化 (a) $\phi=1/7$; (b) $\phi=2/7$; (c) $\phi=3/7$; (d) $\phi=4/7$; (e) $\phi=5/7$; (f) $\phi=6/7$; (g) $\phi=7/7$

6.6.2 尾迹作用下的分离泡转捩图画

图 114 给出了算例C4 在一个周期内的瞬态流场，其中 (a) ~ (g) 分别对应相位 $\phi = 1/7 \sim 7/7$ ，图中所示为吸力面第一层网格的切向速度云图，两条虚线分别代表时均的分离/再附位置，实线包围的区域则是瞬态流场的分离区。相比图 113 的相均分离泡，瞬态场中分离区的形状显然要复杂的多： $\phi = 1/7$ 相位，由于尾迹还未出现，分离泡尺寸较大，形状也较为规则； $2/7$ 相位，尾迹与分离的剪切层相互作用，出现卷起涡，分离泡变的不规则； $3/7$ 相位，白色虚线圈内出现了由涡环构成的湍斑结构； $4/7$ 相位，湍斑进一步发展； $5/7$ 相位，湍斑穿过分离的剪切层向下游运动； $6/7 \sim 7/7$ 相位，尾迹、湍斑依次通过，分离泡逐渐恢复常态。由于紧靠壁面，图中的湍斑并不十分清楚，但从图中仍可以看出：首先，湍斑出现的位置大概在相均分离点之前；其次，在向下游运动的过程中，湍斑能够抑制分离泡。



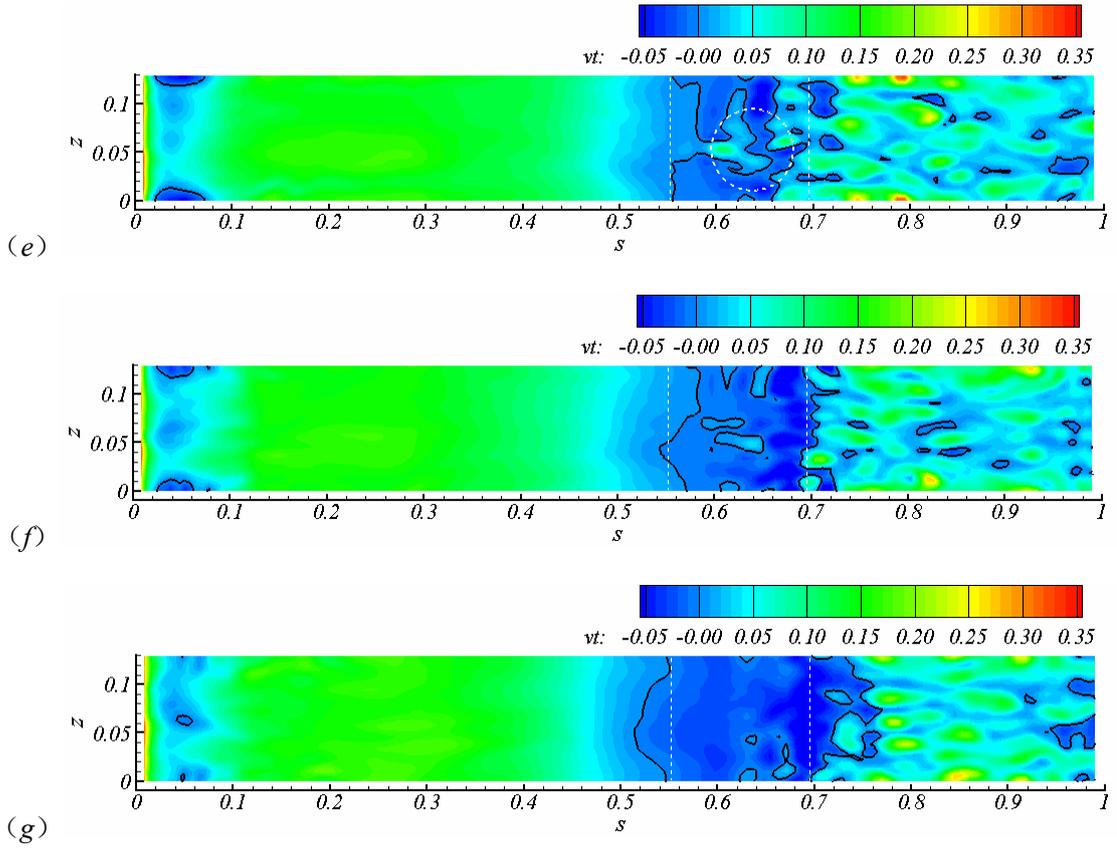
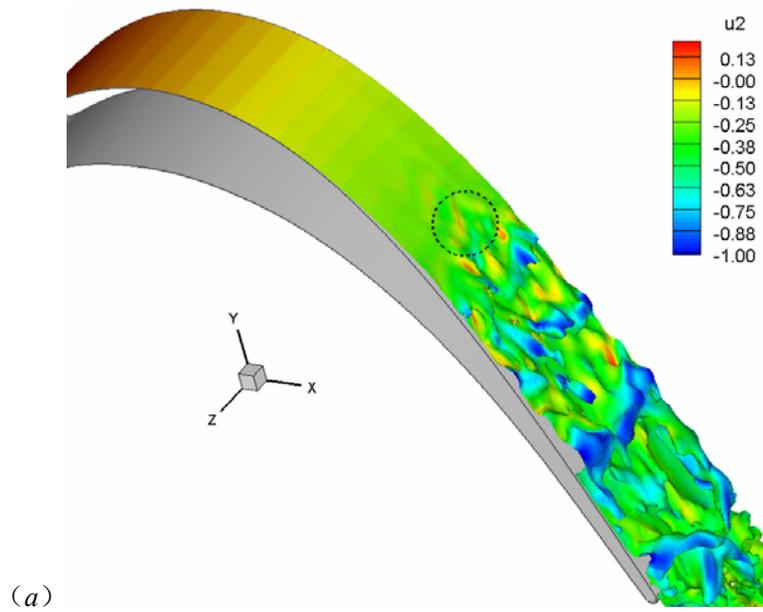


图 114 算例 C4 吸力面第一层网格的切向速度云图，两条虚线分别代表时均的分离/再附位置，实线是 $v_t = 0$ 的等值线 (a) $\phi = 1/7$, $t = 50.734756$; (b) $\phi = 2/7$, $t = 51.116220$; (c) $\phi = 3/7$, $t = 51.497684$; (d) $\phi = 4/7$, $t = 51.879149$; (e) $\phi = 5/7$, $t = 52.260613$; (f) $\phi = 6/7$, $t = 52.642077$; (g) $\phi = 7/7$, $t = 53.023542$



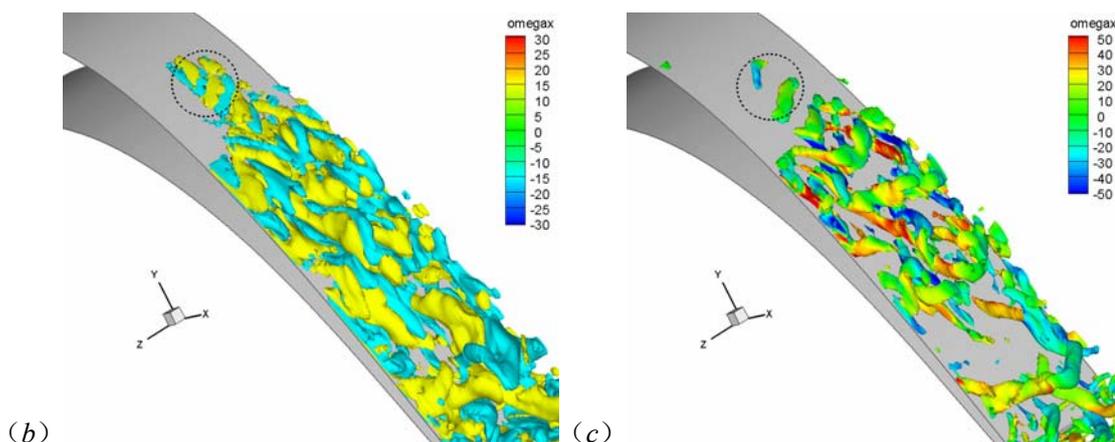


图 115 算例 C4 瞬态流场中的湍流斑, $t=51.955442$ 时刻, $\phi = 3/5$ (a) $u = 0.2$ 等值面, 采用速度分量 v 着色; (b) $\omega_x = \pm 15$ 等值面; (c) $Q = 200$ 等值面, 采用涡量 ω_x 着色

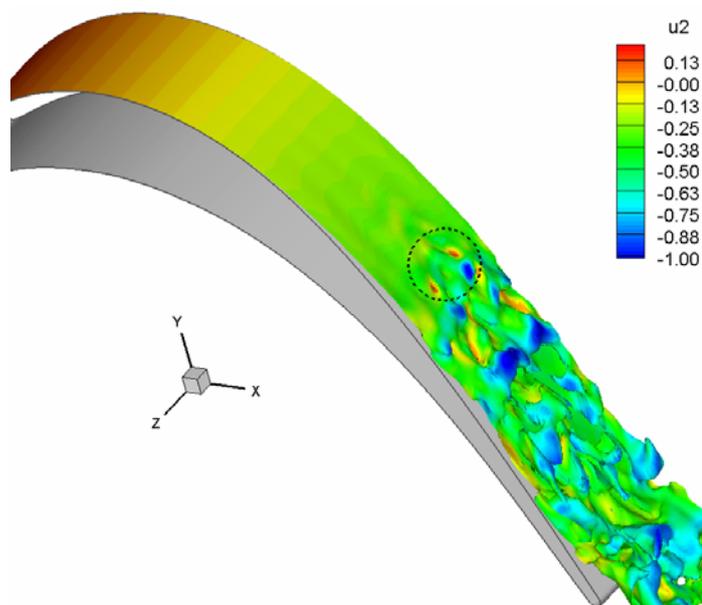


图 116 算例 C3 瞬态流场中的湍流斑, $t=54.854571$ 时刻, $\phi = 24/35$, $u = 0.2$ 等值面, 采用速度分量 v 着色

为了清晰展示图 114 中发现的湍流斑, 图 115 给出了算例 C4 在 $t=51.955442$ 时刻、 $\phi = 3/5$ 相位的瞬态场, 该流场处于图 114 的 (d) 和 (e) 之间。图 (a) 是 $u = 0.2$ 的等值面, 采用速度分量 v 着色, 图中虚线框位置的三角形区域即是湍斑; 图 (b) 所示为 $\omega_x = \pm 15$ 的等值面, 图 (c) 则是 $Q = 200$ 的等值面, 采用涡量 ω_x 着色, 从这两幅图画可以看出, 同 Yaras 等^{[232][233]}的发现类似, 这里的湍斑也表现为一系列的涡环, 其结构与附着流中的湍斑并不相同。对于算例 C3, 瞬态流场中同样可以见到类似的湍斑, 图 114 给出了算例 C3 在 $t=54.854571$ 时刻、 $\phi = 24/35$ 相位下的瞬态场, 图中所示为 $u = 0.2$ 的等值面, 采用速度分量 v 着色, 容易看出, 虚线框内所示也是三角形的湍斑。

需要注意的是，上面关于C3、C4 湍斑的例子中，湍流斑均出现在尾迹与边界层强烈作用的相位，其初始位置也在分离点之前；除了这种情况，在C3、C4 的瞬态流场中还能观察到湍斑出现于尾迹通过间隙的例子，如图 117 给出了算例C4 在 $\phi=1/5$ 相位下的瞬态流场，图中 (a) (b) 所示分别为吸力面第一层网格的切向及法向速度分量云图，从图中可以清晰看到出现在分离剪切层中的湍流斑。这说明，在本文的计算条件下，湍斑既可能出现在分离点之前，也可能出现在分离点之后。

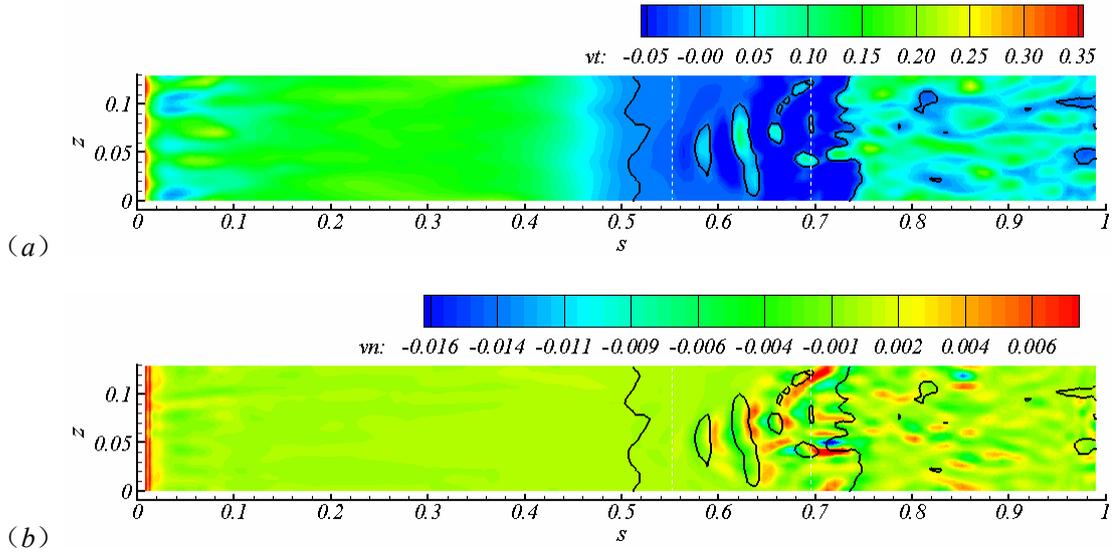


图 117 算例 C4 吸力面第一层网格的速度分量云图， $t=53.557592$ 时刻， $\phi=1/5$ ，两条虚线分别代表时均的分离/再附位置，实线是 $v_t=0$ 的等值线 (a) 切向速度分量 v_t ；(b) 法向速度分量 v_n

综合上面的分析，对于本节开始时提出的问题，可以回答如下：针对本具体的算例，转捩既可能在分离点之前就已经开始，也可能出现在分离后的自由剪切层中；两种情况下都可以见到湍流斑，但此时的湍斑主要由涡环构成，其形态与附着边界层中的湍流斑并不相同。关于湍斑产生的原因，可能仍然和附着边界层/分离剪切层中的流向条带有关：外部扰动（来自尾迹或背景湍流度）的低频分量进入边界层/剪切层后，沿流向被放大和拉伸，形成流向速度的条带结构，条带中的逆向射流若被抬升到边界层边缘，受到小尺度扰动的触发，就可能流动崩溃，由此随机的产生湍流斑。尾迹通过的间隙，虽然也有湍斑在分离的剪切层中出现，但层流分离泡的转捩仍以 K-H 不稳定性为主，因此尾迹作用条件下的分离流转捩是多模态的。

6.7 小结

对于周期性尾迹来流（算例 C3）和有背景湍流度周期性尾迹来流（算例 C4）两种

入口边界条件下的低压涡轮叶栅流动, 本节从时均流动图画、相均流动图画、瞬态流场、高阶统计量等各个方面对计算结果进行了分析和比较, 从中总结了两种工况下周期性尾迹与低压涡轮叶栅的相互作用规律, 对尾迹诱导的(吸力面)分离流转捩现象也有了较为深刻的认识。

两种条件下, 由于来流尾迹的频率较高且强度较大, 整个叶栅通道的流动特性很大程度上被尾迹所控制, 而背景湍流度的效应则十分有限, 因此, 无论对时均流场、相均流场还是高阶统计量, 甚至同一相位下的瞬态流场, 两个算例的结果都非常接近。

在尾迹的周期性扫掠下, 吸力面的大尺度分离区域不再存在, 取而代之以小尺寸的分离泡, 涡轮叶片的升力增加、阻力减小, 出口测量平面的总压损失也大大降低。从时均流场看, 吸力面边界层最大的损失出现在分离泡的再附点附近, 雷诺应力、湍动能的极值也在该位置, 由于背景湍流度的效应, C4 的分离泡尺寸比 C3 稍小一些, 其损失系数及高阶统计量的极值也比 C3 小。

尾迹在叶栅通道内输运的过程中, 由于流动系数偏高, 其弓形区出现在压力面一侧, 靠近吸力面的尾迹则几乎以平行于叶片的角度掠过叶片表面, 弓形区尾迹因主流的拉伸作用变宽, 其它大部分区域的尾迹则因拉伸作用而变细, 从瞬态流场看, 来流尾迹中的小尺度结构因受到拉伸而演化为细长的流向涡。此外, 叶栅通道内的非定常流动几乎是等熵的, 流场中出现的总温总压“异常”则来源于静压的脉动。

周期性尾迹作用下, 吸力面边界层的转捩是多模态的: 在尾迹通过的间隙, 分离剪切层的转捩以 K-H 不稳定性为主, 偶尔伴随湍流斑的出现; 尾迹掠过分离区时, 随机产生的湍流斑能够在很大程度上抑制分离。湍流斑出现的位置既可能在分离点之前, 也可能在分离后的自由剪切层中, 结构上主要由涡环组成, 其形态与附着边界层中的成熟湍流斑并不相同。

主要结论与研究展望

I 主要结论

无人飞行器在高空巡航时，其发动机部件将工作在很低的雷诺数下，低雷诺数条件对发动机的运行会产生显著影响，其中负面效应最大的是低压涡轮部件。对于低压涡轮而言，如何深入理解低雷诺数条件下叶片表面边界层的时空演化机制，进而采取有效措施控制边界层的转捩与分离，特别是叶片表面的非再附式分离，将是低雷诺数低压涡轮设计中最为关键的技术之一。

本文围绕非定常环境中涡轮叶片边界层时空演化机制这一核心问题，针对多尺度流动的有效研究手段——大涡模拟方法、定常来流条件下叶片表面边界层复杂时空演化机制、以及周期性激励下边界层的转捩机理等开展了较为深入系统的研究，并得到以下主要结论：

(1) 针对大涡模拟算法进行了细致研究，在此基础上发展了拥有自主知识产权的、可用于叶轮机械等复杂流动的高效分区并行大涡模拟程序，并利用数个典型算例对程序进行了校验，表明所发展的程序具有很好的精度和对非定常流场细节的描述能力，为多尺度非定常复杂流动提供了有效的研究手段。

低雷诺数条件下，涡轮叶片表面存在的分离、转捩等复杂流动现象使得传统的雷诺平均方法很难满足机理研究的要求，而作为雷诺平均和直接数值模拟折衷的大涡模拟则是处理这一问题的理想手段。尽管在本文中，大涡模拟的实际应用仅限于叶栅流动，但考虑到数值方法的扩展性，作者仍然希望能够发展一种具有较好通用性的高效大涡模拟算法，用于叶轮机械等复杂流动现象的机理研究。

通过对大涡模拟算法的研究并针对叶轮机械内部流动的特点，本文最终选定的算法具有如下特征：第一，控制方程为可压缩的 N-S 方程组，方程中的亚格子应力和亚格子热通量项均使用动力涡粘模型封闭；第二，计算网格为任意界面匹配的多块结构化网格，利用计算域分解和消息传递的并行编程环境 (MPI)，实现对复杂流动的高效并行计算；第三，方程采用有限体积法离散，对流项使用四阶偏斜对称的中心格式，通过添加人工粘性项或显式滤波消除流场中的非物理振荡，粘性项使用二阶中心格式，时间推进则是 3 阶 3 步的显式 Runge-Kutta 方法。在此基础上，作者在有限体积的框架内独立发展了一套具有较高预测精度、能够处理复杂几何流域、并行化的可压缩流动大涡模拟程序。

为了解新程序的性能指标,选择充分发展的槽道湍流和亚临界的圆柱绕流作为校验算例,通过改变计算参数设置,对其进行了广泛而细致的测试,主要发现如下:第一,为保证计算的稳定性,亚格子应力张量的各向同性分量 τ_{kk} 应该略去(即将其系数 C_I 设为0),另外两个亚格子模型系数 C 和 Pr_{sgs} 也应该恰当的限制取值范围;第二,对流项使用四阶偏斜对称格式离散时,其有限体积公式可能导致计算不稳定,因而应改用有限差分公式;第三,对于某些较为复杂的流动问题,人工粘性项可能难以抑制流场中的非物理振荡,此时若改用显式滤波通常能获得较好的效果。

槽道/圆柱的校验以及后文的实践都表明:新程序具有较高的计算精度,能够处理具有复杂几何/物理边界条件的流动问题,适合于叶轮机械等复杂流动现象的机理研究。

(2) 针对叶轮机内部复杂的非定常流动环境,给出了能够准确反映上游叶片排尾迹周期性扫掠、背景湍流效应等复杂边界条件的处理方法,为模拟叶轮机内部非定常复杂流动提供了直接的技术支持。

完成程序的校验后,结合对照实验,对低雷诺数下的低压涡轮叶栅流动进行了模拟,为深入认识非定常扰动环境下涡轮叶片边界层的流动机理,一共进行了四种不同入口边界条件的计算,即:定常来流、有背景湍流度的定常来流、周期性尾迹来流、有背景湍流度的周期性尾迹来流。对照实验中,测得的来流参数包括总温、总压、气流角等,如何既满足实验给定的总参数,又能正确模拟背景湍流度/周期性尾迹的效应,是计算前首先需要解决的问题。

事实上,不可压低压涡轮叶栅的模拟中,计算域入口加入背景湍流度/周期性尾迹相对简单,目前也已经存在大量相关的研究工作;但是对于可压缩的叶栅流动,有关背景湍流度效应的研究极少,而关于周期性尾迹效应的工作则完全没有。作者在总结前人工工作的基础上,首次给出了下面的边条设置方案:对所有算例,均利用实验测得的总温、总压、气流角计算进口边条,若计算域入口还存在背景湍流度/周期性尾迹的效应,则单独计算自由衰减的均匀各向同性湍流/时间演化的尾迹流,从中提取出满足湍流度/尾迹特性要求的扰动场,冻结该流场,再将其叠加到计算域入口,由此完成边条的设置。

实践证明:这一方法能够在基本满足进口总参数的条件下正确模拟叶栅入口背景湍流度/周期性尾迹的效应。

(3) 利用所发展的大涡模拟程序,以某低压涡轮叶片为对象,细致研究了背景湍流等因素对叶片表面分离流转捩过程的影响,并得到了变压力梯度环境中边界层分离转捩的细致流动图画,深化了对其机理的了解。

低雷诺数条件下, 涡轮叶片表面大部分区域处于层流状态, 流动抵抗分离的能力弱, 受吸力面后部的逆压梯度作用, 边界层增厚并发生分离, 最终形成闭合的分离泡甚至开放的分流区。尽管吸力面分离剪切层的转捩均通过 K-H 不稳定性发生, 但本文的研究结果表明: 背景湍流度的存在与否将直接影响边界层的分离及转捩图画。

没有背景湍流度时, 吸力面的层流边界层在逆压梯度下离开壁面, 形成二维自由剪切层, 由于 K-H 不稳定性, 涡层失稳, 出现波状摆动, 而后卷起二维的展向大涡; 离散的展向涡随平均流向下游输运, 非线性作用下, 次谐波的迅速增长导致相邻展向涡的配对与合并; 边界层分离后, 展向速度分量也开始增长, 三维扰动的发展配合相邻展向涡间的拉伸导致流向涡对的出现, 流向涡对对于剪切层内外的动量输运起着重要作用, 其存在时间远长于展向涡。

背景湍流度作用下, 分离剪切层失稳而后卷起展向涡的过程仍受 K-H 不稳定性控制, 但表征其效应的小尺度结构对分离前附着边界层以及分离区的流动均会产生影响: 一方面, 小尺度结构使得附着边界层中存在较强的三维扰动, 分离剪切层受此影响迅速失稳, 其展向涡的卷起位置更接近分离点; 另一方面, 展向涡从形成开始, 就不断受到小尺度结构的“撞击”, 在这种外部扰动下迅速发生破碎, 因此其生存时间较短, 来不及发生配对现象, 而流场中也很少出现大尺度的流向涡对。

正是由于背景湍流度的影响, 分离剪切层的发展加快, 转捩位置提前, 由此分离区尺寸变小, 流动损失降低。但通常情况下, 背景湍流度的效应还难以将开放的分流区变为封闭的分离泡, 要想抑制吸力面的开放式分离, 就必须考虑其他的流动控制手段。

(4) 利用所发展的大涡模拟程序, 较为系统的研究了尾迹与边界层的相互作用图画, 得到了周期性尾迹激励下边界层分离流转捩的时空演化细节, 深化了对其机理的了解。

在叶轮机内部, 流动的本质是非定常的, 如上游叶片的尾迹将对下游叶片表面边界层产生周期性的激励, 时刻影响边界层的时空演化机制。本文的工作亦表明: 相对于背景湍流而言, 周期性尾迹对吸力面大尺度分离的影响则更为显著, 可大幅度改变了叶栅通道内的流动图画。

尾迹在叶栅通道内输运的过程中, 由于流动系数偏高, 靠近吸力面的尾迹几乎以平行于叶片的角度掠过叶片表面, 从瞬态流场看, 来流尾迹中的小尺度结构因受到拉伸而演化为细长的流向涡; 正是在这些流向涡的周期性扫掠下, 吸力面的开放式分离被小尺度的分离泡代替, 叶栅的流动损失也大大降低。

尾迹的周期性作用，使得分离泡相均的分离/再附点围绕其时均分离/再附点前后移动：尾迹通过的间隙，分离泡尺寸变大，分离剪切层的转捩以 K-H 不稳定性为主，偶尔伴随着湍流斑的出现，这一阶段边界层的损失最大；尾迹掠过时，分离泡尺寸减小，随机产生的湍流斑能够在很大程度上抑制分离，边界层的损失也大大降低。因此，吸力面边界层的转捩是多模态的：K-H 不稳定性和随机产生的湍流斑均发挥重要作用。

有关湍流斑的形成则可以解释如下：外部扰动（来自尾迹或背景湍流度）的低频分量进入边界层/剪切层后，沿流向被放大和拉伸，形成流向速度的条带结构，条带中的逆向射流若被抬升到边界层边缘，受到小尺度扰动的触发，就可能流动崩溃，由此随机的产生湍流斑。湍流斑出现的位置，既可能在分离点之前，也可能在分离后的自由剪切层中，在形态上表现为一个指向上游的三角，与附着边界层中的成熟湍斑并不相同，结构上则主要由一系列的涡环组成。

(5) 利用大涡模拟程序，建立了可供数值模拟算法/模型研究以及工程设计使用的高精度数据库，为 RANS 中湍流模型的改进和发展以及涡轮中流动运动学模型的建立打下良好的基础。

本文利用大涡模拟提供的全流场随时间演化的所有流动细节，建立了尾迹与边界层相互作用的数据库。在该数据库的基础上可对非定常环境中叶片边界层的时空演化机制进行细致研究，并建立相应的尾迹与边界层相互作用的运动学模型，以探讨非定常环境中低压涡轮的设计优化准则和新的设计方法，并将新的设计自由度引入低压涡轮气动设计体系，以突破传统设计体系定常流动假设的框架，在设计时充分考虑叶轮机内部固有的非定常效应，最终达到减少吸力面的分离损失、大幅提高低压涡轮性能的目的。

其次，大涡模拟形成的高精度数值数据库除用于流动机理的分析外，还可以作为 RANS 程序算法湍流模型等校验和发展改进的基准。尽管计算机的运算速度、存储容量不断提高，但在可预见的将来，雷诺平均方法仍是工程实践中最为重要的数值手段，利用大涡模拟建立的数值数据库，校验或改进已有的湍流模型，提高其对分离、转捩等复杂流动现象的预测精度，在工程上具有重要意义。

总之，本论文研究导致的拥有自主知识产权的高效大涡模拟程序的建立，背景湍流和周期性上游尾迹扫掠等边界条件给定方法的确立，对尾迹与下游边界层相互作用、特别是分离—转捩过程的模拟能力和机理的深入理解，为涡轮（特别是低雷诺数条件下）设计过程中控制边界层分离转捩过程，优化几何和气动条件提供了必不可少的指导理论和有效工具，具有重要的工程意义。

II 研究展望

围绕非定常环境中涡轮叶片边界层时空演化机制这一核心问题，本文采用大涡模拟方法作为主要的数值手段，对低雷诺数的低压涡轮叶栅流动进行了模拟，研究了定常来流条件及周期性尾迹激励下的分离边界层转捩机理，取得了一些有意义的结果，展望本文的后续工作如下：

第一，对于新发展的大涡模拟程序，为了扩展它在叶轮机械内部复杂流动研究中的应用，需要在以下方面进行完善：首先，叶轮机内典型的转静干涉现象通常需要采用非匹配的多块网格进行处理，但目前的程序还只能计算界面匹配的网格，因而需要进行拓展；其次，目前使用的动力模型需要沿流动的统计均匀方向进行平均操作，无法应用到叶栅端区等完全三维流动的模拟中，因而需要考虑在程序中加入新的亚格子模型；最后，目前使用的数值格式还无法处理有间断的流动，但激波等间断现象却是在叶轮机内部广泛存在的，因而也需要考虑这方面的拓展。

第二，利用大涡模拟研究上游尾迹与下游叶片边界层的相互作用，在此基础上建立相应的运动学模型，可以为低雷诺数低压涡轮的气动设计提供新的自由度，但是在实践中，雷诺数、负荷分布形式等都会对涡轮叶片表面的流动图画产生显著影响，本文中只针对特定叶型某一雷诺数下的流动进行了计算和分析，要建立相对完善的尾迹与边界层相互作用的运动学模型，就必需进一步研究不同雷诺数、不同负荷分布形式下叶片表面的非定常流动图画。

参考文献

- [1] Office of the Secretary of Defense, Unmanned Aircraft Systems roadmap 2005-2030, 2005.
- [2] The Joint Air Power Competence Centre, Flight plan for Unmanned Aircraft Systems (UAS) in NATO, Version 5.4, 2007.
- [3] Weinberg, M. and Wyzykowski, J., Development and testing of a commercial turbofan engine for high altitude UAV applications, SAE Paper 2001-01-2972, 2001.
- [4] Lake, J. P., King, P. I. and Rivir, R. B., Reduction of separation losses on a turbine blade with low Reynolds number, AIAA Paper 99-0242, 1999.
- [5] 杨琳, 低雷诺数低压涡轮内部复杂流动机理及气动设计方法研究, 北京: 北京航空航天大学, 2006.
- [6] 胡晓煜, 高高空、长航时无人机动力技术简介, 航空周刊, 2002, 40/41: 19-20.
- [7] Hodson, H. P. and Howell, R. J., The role of transition in high-lift low-pressure turbines for aeroengines, Progress in Aerospace Sciences, 2005, 41: 419-454.
- [8] Wisler, D. C., The technical and economic relevance of understanding boundary layer transition in gas turbine engines, Proceedings of Minnowbrook II - 1997 Workshop on Boundary Layer Transition in Turbomachines (NASA/CP-1998-206958), New York, 1997.
- [9] Mayle, R. E., The role of laminar-turbulent transition in gas turbine engines, ASME Paper 91-GT-261, 1991.
- [10] Hodson, H. P. and Howell, R. J., Bladerow interactions, transition, and high-lift aerofoils in low-pressure turbines, Annu. Rev. Fluid Mech., 2005, 37: 71-98.
- [11] Castner, R., Chiappetta, S., Wyzykowski, J., et al., An engine research program focused on low pressure turbine aerodynamic performance, ASME Paper GT-2002-30004, 2002.
- [12] Denton, J. D., Loss mechanisms in turbomachines, ASME Paper 93-GT-435, 1993.
- [13] Howell, R. J., Ramesh, O. N., Hodson, H. P., et al. High lift and aft loaded profiles for low pressure turbines, Journal of Turbomachinery, 2001, 124: 385-392.
- [14] 陈懋章, 粘性流体动力学基础, 北京: 高等教育出版社, 2002.

- [15] Tropea, C., Yarin, A. L. and Foss, J. F., Springer handbook of experimental fluid mechanics, Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [16] Fefferman, C. L., Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation, Clay Mathematics Institute, 2000.
- [17] 周恒, 赵耕夫, 流动稳定性, 北京: 国防工业出版社, 2004.
- [18] Monin, A. S. and Yaglom, A. M., Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence, Vol. 1, Cambridge: The MIT Press, 1971.
- [19] Monin, A. S. and Yaglom, A. M., Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence, Vol. 2, Cambridge: The MIT Press, 1975.
- [20] Dovgal, A. V., Kozlov, V. V. and Michalke, A., Laminar boundary layer separation: instability and associated phenomena, Progress in Aerospace Sciences, 1994, 30: 61-94.
- [21] Boiko, A. V., Grek, G. R., Dovgal, A. V., et al., The origin of turbulence in near-wall flows, Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [22] Kim, J., Moin, P. and Moser, R., Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, J. Fluid Mech., 1987, 177: 133-166.
- [23] Hoyas, S. and Jiménez, J., Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau=2003$, Physics of Fluids, 2006, 18: 011702.
- [24] TOP500 Team, TOP500 report for June 2008, <http://www.top500.org/lists/2008/06>, 2008-06-20.
- [25] Lesieur, M., Turbulence in Fluids, 3rd Edition, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [26] Sagaut, P., Deck, S. and Terracol, M., Multiscale and multiresolution approaches in turbulence, London: Imperial College Press, 2006.
- [27] Tennekes, H. and Lumley J. L., A first course in turbulence, Cambridge: The MIT Press, 1972.
- [28] Cantwell, B. J., Organized motion in turbulent flow, Annu. Rev. Fluid Mech., 1981, 13: 457-515.
- [29] Robinson, S. K., Coherent motions in the turbulent boundary layer, Annu. Rev. Fluid Mech., 1991, 23: 601-639.
- [30] Panton, R. L., Overview of the self-sustaining mechanisms of wall turbulence, Progress

- in *Aerospace Sciences*, 2001, 37: 341-383.
- [31] Moin, P. and Mahesh, K., Direct numerical simulation: a tool in turbulence research, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1998, 30: 539–578.
- [32] Pope, S. B., *Turbulent flows*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [33] Wagner, C., Hüttl, T. and Sagaut, P., *Large-eddy simulation for acoustics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [34] Spalart, P. R., Strategies for turbulence modelling and simulations, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2000, 21: 252-263.
- [35] Grinstein, F. F. and Karniadakis, G. E., Alternative LES and hybrid RANS/LES for turbulent flows, *Journal of Fluids Engineering*, 2002, 124: 821-822.
- [36] Celik, I., RANS/LES/DES/DNS: the future prospects of turbulence modeling, *Journal of Fluids Engineering*, 2005, 127: 829-830.
- [37] Sagaut, P., *Large eddy simulation for incompressible flows: an introduction*, 3rd Edition, Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [38] Hirsch, C., *Numerical computation of internal and external flows*, Vol. 1: fundamentals of computational fluid dynamics, 2nd Edition, Burlington: Butterworth-Heinemann, 2007.
- [39] Geurts, B. J., *Elements of direct and large-eddy simulation*, Philadelphia: R. T. Edwards, Inc., 2004.
- [40] Orszag, S. A. and Patterson G. S., Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence, *Physical Review Letters*, 1972, 28: 76–79.
- [41] Kleiser, L. and Zang, T. A., Numerical simulation of transition in wall-bounded shear flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, 23: 495-537.
- [42] Kaneda, Y., Ishihara, T., Yokokawa, M., et al., Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box, *Physics of Fluids*, 2003, 15(2): L21-24.
- [43] Ishihara, T., Kaneda, Y., Yokokawa, M., et al., Small-scale statistics in high-resolution direct numerical simulation of turbulence: Reynolds number dependence of one-point velocity gradient statistics, *J. Fluid Mech.*, 2007, 592: 335-366.
- [44] Krishnan, L. and Sandham, N. D., Effect of Mach number on the structure of turbulent

- spots, *J. Fluid Mech.*, 2006, 566: 225-234.
- [45] Krishnan, L. and Sandham, N. D., On the merging of turbulent spots in a supersonic boundary-layer flow, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2006, 27: 542-550.
- [46] Krishnan, L. and Sandham, N. D., Strong interaction of a turbulent spot with a shock-induced separation bubble, *Phys. Fluids*, 2007, 19(016102): 1-11.
- [47] Zaki, T. and Durbin, P. A., Mode interaction and the bypass route to transition, *J. Fluid Mech.*, 2005, 531: 85-111.
- [48] Zaki, T. and Durbin, P. A., Continuous mode transition and the effects of pressure gradient, *J. Fluid Mech.*, 2006, 563: 357-388.
- [49] Durbin, P. and Wu, X., Transition beneath vortical disturbances, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2007, 39: 107-128.
- [50] Wu, X. and Durbin, P. A., Evidence of longitudinal vortices evolved from distorted wakes in a turbine passage, *J. Fluid Mech.*, 2001, 446: 199-228.
- [51] Kalitzin, G., Wu, X. and Durbin, P. A., DNS of fully turbulent flow in a LPT passage, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2003, 24: 636-644.
- [52] Michelassi, V., Wissink, J. and Rodi, W., Analysis of DNS and LES of flow in a low pressure turbine cascade with incoming wakes and comparison with experiments, *Flow, Turbulence and Combustion*, 2002, 69: 295-330.
- [53] Wissink, J. G., DNS of separating, low Reynolds number flow in a turbine cascade with incoming wakes, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2003, 24: 626-635.
- [54] Wissink, J. G., Rodi, W. and Hodson, H. P., The influence of disturbances carried by periodically incoming wakes on the separating flow around a turbine blade, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2006, 27: 721-729.
- [55] Wissink, J. G. and Rodi, W., Direct numerical simulation of flow and heat transfer in a turbine cascade with incoming wakes, *J. Fluid Mech.*, 2006, 569: 209-247.
- [56] Wissink, J. G. and Rodi, W., Direct numerical simulations of transitional flow in turbomachinery, *Journal of Turbomachinery*, 2006, 128: 668-678.
- [57] Rodi, W., DNS and LES of some engineering flows, *Fluid Dynamics Research*, 2006, 38: 145-173.
- [58] Zaki, T., Durbin, P. A., Rodi, W., et al., Direct numerical simulation of by-pass and

- separation-induced transition in a linear compressor cascade, ASME Paper GT-2006-90885, 2006.
- [59] Wilcox, D. C., Turbulence modeling for CFD, La Cañada: DCW Industries, Inc., 1994.
- [60] Chen, C.-J. and Jaw, S.-Y., Fundamentals of turbulence modeling, Washington: Taylor & Francis, 1998.
- [61] 邹正平, 叶轮机三维复杂流动的若干问题, 北京: 北京航空航天大学, 1999.
- [62] 宁方飞, 考虑真实几何复杂性的跨音压气机内部流动的数值模拟, 北京: 北京航空航天大学, 2002.
- [63] Bradshaw, P., Turbulence modeling with application to turbomachinery, Prog. Aerospace Sci., 1996, 32: 575-624.
- [64] Praisner, T. J. and Clark, J. P., Predicting transition in turbomachinery - part I: a review and new model development, Journal of Turbomachinery, 2007, 129: 1-13.
- [65] Praisner, T. J., Grover, E. A., Rice, M. J., et al., Predicting transition in turbomachinery - part II: model validation and benchmarking, Journal of Turbomachinery, 2007, 129: 14-22.
- [66] Cutrone, L., De Palma, P., Pascazio, G., et al., An evaluation of bypass transition models for turbomachinery flows, International Journal of Heat and Fluid Flow, 2007, 28: 161-177.
- [67] Cutrone, L., De Palma, P., Pascazio, G., et al., Predicting transition in two- and three-dimensional separated flows, International Journal of Heat and Fluid Flow, 2008, 29: 504-526.
- [68] Piomelli, U. and Balaras, E., Wall-layer models for large-eddy simulations, Annu. Rev. Fluid Mech., 2002, 34: 349-74.
- [69] Pope, S. B., Ten questions concerning the large-eddy simulation of turbulent flows, New Journal of Physics, 2004, 6(35): 1-24.
- [70] Chapman, D. R., Computational aerodynamics development and outlook, AIAA Journal, 1979, 17: 1293-1313.
- [71] Spalart, P. R., Jou, W.-H., Stretlets, M., et al., Comments on the feasibility of LES for wings and on the hybrid RANS/LES approach, Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, 1997: 137-147.

- [72] Schumann, U., Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli, *Journal of Computational Physics*, 1975, 18: 376-404.
- [73] Speziale, C. G., Turbulence modeling for time-dependent RANS and VLES: a review, *AIAA Paper 97-2051*, 1997.
- [74] Travin, A., Shur, M., Strelets, M., et al., Detached-eddy simulations past a circular cylinder, *Flow, Turbulence and Combustion*, 1999, 63: 293-313.
- [75] Squires, K. D., Forsythe, J. R., Morton, S. A., et al., Progress on detached-eddy simulation of massively separated flows, *AIAA Paper 2002-1021*, 2002.
- [76] Spalart, P. R., Deck, S., Shur, M. L., et al., A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2006, 20: 181-195.
- [77] Baggett, J. S., On the feasibility of merging LES with RANS for the near-wall region of attached turbulent flows, *Annual Research Briefs*, Center for Turbulence Research, Stanford University, 1998.
- [78] Kawai, S. and Fujii, K., Computational study of a supersonic base flow using hybrid turbulence methodology, *AIAA Journal*, 2005, 43(6): 1265-1275.
- [79] Lesieur, M., Métais, O., Comte, P., *Large-eddy simulations of turbulence*, Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [80] Smagorinsky, J., General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic equations., *Mon. Weather Rev.*, 1963, 91: 99-164.
- [81] Lilly, D. K., The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments, *Proc. IBM Scientific Computing Symp. on Environmental Sciences*, Yorktown Heights, New York, 1967: 195-210.
- [82] Deardorff, J. W., A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 1970, 41: 453-480.
- [83] Reynolds, W. C., Computation of turbulent flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1976, 8: 183-208.
- [84] 是勋刚, 湍流, 天津: 天津大学出版社, 1994.
- [85] Kraichnan, R. H., Eddy viscosity in two and three dimensions, *J. Atmos. Sci.*, 1976, 33: 1521-1536.
- [86] Bardina J., Ferziger J. H. and Reynolds W. C., Improved subgrid model for large-eddy

- simulation, AIAA Paper 80-1357, 1980.
- [87] Kiyosi, H., Large eddy simulation of turbulent channel flow by one-equation modeling, *Journal of the Physical Society of Japan*, 1985, 54(8): 2855-2865.
- [88] Moin, P. and Kim, J., Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, 1982, 118: 341-377.
- [89] Moin, P. and Kim, J., The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. Part 1. Analysis of instantaneous fields and statistical correlations, *J. Fluid Mech.*, 1985, 155: 441-464.
- [90] Kim, J. and Moin, P., The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. Part 2. Study of ensemble-averaged fields, *J. Fluid Mech.*, 1986, 162: 339-363.
- [91] Rogallo, R. S. and Moin, P., Numerical simulation of turbulent flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1984, 16: 99-137.
- [92] Piomelli, U., Zang, T. A., Speziale, C. G., et al., On the large-eddy simulation of transitional wall-bounded flows, *Phys. Fluids A*, 1990, 2: 257-265.
- [93] Piomelli, U., Cabot, W. H., Moin, P., et al., Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flows, *Phys. Fluids A*, 1991, 3: 1766-1771.
- [94] Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., et al., A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids A*, 1991, 3: 1760-1765.
- [95] Meneveau, C. and Katz, J., Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2000, 32: 1-32.
- [96] Germano M., Turbulence: the filtering approach, *J. Fluid Mech.*, 1992, 238: 325-336.
- [97] Lilly, D. K., A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, *Phys. Fluids A*, 1992, 4: 633-635.
- [98] Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R., A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows, *Phys. Fluids A*, 1993, 5: 3186-3196.
- [99] Ghosal, S., Lund, T. S., Moin, P., et al., A dynamic localization model for large eddy simulation of turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, 1995, 286: 229-255.
- [100] Piomelli, U. and Liu, J., Large-eddy simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model, *Phys. Fluids*, 1995, 7: 839-848.
- [101] Meneveau, C., Lund T. S. and Cabot W. H., A Lagrangian dynamic subgrid-scale model

- of turbulence, *J. Fluid Mech.*, 1996, 319: 353-385.
- [102] Métais, O. and Lesieur M., Spectral large-eddy simulations of isotropic and stably-stratified turbulence, *J. Fluid Mech.*, 1992, 239: 157-94.
- [103] Lesieur, M., Métais, O., New trends in large-eddy simulations of turbulence, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 1996, 28: 45-82.
- [104] Ghosal, S. and Moin, P., The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry, *J. Comp. Phys.*, 1995, 118: 24-37.
- [105] Ghosal S., An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence, *J. Comp. Phys.*, 1996, 125: 187-206.
- [106] Kravchenko, A. G. and Moin, P., On the effect of numerical errors in large Eddy simulations of turbulent flows, *J. Comp. Phys.*, 1997, 131: 310-322.
- [107] Vasilyev, O. V., Lund, T.S. and Moin, P., A general class of commutative filters for LES in complex geometries, *J. Comp. Phys.*, 1998, 146: 82-104.
- [108] Jordan S. A., A large-eddy simulation methodology in generalized curvilinear coordinates, *J. Comp. Phys.* 1999, 148: 322-340.
- [109] Moin, P., Progress in large eddy simulation of turbulent flows, AIAA Paper 97-0749, 1997.
- [110] Moin, P., Advances in large eddy simulation methodology for complex flows, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2002, 23: 710-720.
- [111] Yoshizawa, A., Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling, *Phys. Fluids*, 1986, 29: 2152-2164.
- [112] Speziale, C. G., Erlebacher. G., Zang, T. A., et al., The subgrid-scale modeling of compressible turbulence, *Phys. Fluids*, 1988, 31(4): 940-942.
- [113] Moin, P., Squires, K., Cabot, W., et al., A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport, *Phys. Fluids A*, 1991, 3(11): 2746-2757.
- [114] Erlebacher, G., Hussaini, M. Y., Speziale, C. G., et al., Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, 1992, 238: 155-185.
- [115] Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H., Subgrid-modeling in LES of compressible flow, *Appl. Sci. Res.*, 1995, 54: 191-203.
- [116] Piomelli, U., Large-eddy simulation: achievements and challenges, *Progress in*

- Aerospace Sciences, 1999, 35: 335-362.
- [117] Martín, M. P., Piomelli, U. and Candler, G. V., Subgrid-scale models for compressible large-eddy simulations, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 2000, 13: 361-376.
- [118] Reynolds, W. C., The potential and limitations of direct and large eddy simulations, *Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads*, 1990, Berlin: Springer-Verlag.
- [119] Chow, F. K. and Moin, P., A further study of numerical errors in large-eddy simulations, *Journal of Computational Physics*, 2003, 184: 366-380.
- [120] DeBonis, J. R., Progress toward large-eddy simulations for prediction of realistic nozzle systems, *Journal of Propulsion and Power*, 2007, 23(5): 971-980.
- [121] Tucker, P. G., Book review on: *Large-Eddy Simulation for Acoustics*, *J. Fluid Mech.*, 2007, 593: 505-507.
- [122] Boris J. P., Grinstein F. F., Oran E. S., et al., New insights into large-eddy simulation, *Fluid Dyn. Res.*, 1992, 10: 199-228.
- [123] Grinstein, F. F., Margolin, L. G. and Rider, W. J., *Implicit large eddy simulation: computing turbulent fluid dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [124] Yan, H., Knight, D. and Zheltovodov, A. A., Large-eddy simulation of supersonic flat-plate boundary layers using the monotonically integrated large-eddy simulation (MILES) technique, *Journal of Fluids Engineering*, 2002, 124: 868-875.
- [125] Grinstein, F. F., Gutmark, E. and Parr, T., Near field dynamics of subsonic free square jets. A computational and experimental study, *Physics of Fluids*, 1995, 7: 1483-1497.
- [126] Grinstein, F. F. and DeVore, C. R., Dynamics of coherent structures and transition to turbulence in free square jets, *Physics of Fluids*, 1996, 8: 1237-1251.
- [127] Grinstein, F. F., Gutmark, E. J., Parr, T. P., et al., Streamwise and spanwise vortex interaction in an axisymmetric jet. A computational and experimental study, *Physics of Fluids*, 1996, 8: 1515-1524.
- [128] Fureby, C. and Grinstein, F. F., Monotonically integrated large eddy simulation of free shear flows, *AIAA journal*, 1999, 37: 544-556.
- [129] Grinstein, F. F., Vortex dynamics and entrainment in rectangular free jets, *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, 437: 69-101.
- [130] Fureby, C. and Grinstein, F. F., Large eddy simulation of high-Reynolds-number free

- and wall-bounded flows, *Journal of Computational Physics*, 2002, 181: 68-97.
- [131] Grinstein, F. F. and Fureby, C., Recent progress on MILES for high Reynolds number flows, *Journal of Fluids Engineering*, 2002, 124: 848-861.
- [132] Grinstein, F. F., Fureby, C. and DeVore, C. R., On MILES based on flux-limiting algorithms, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, 47: 1043-1051.
- [133] Grinstein, F. F. and Fureby, C., On flux-limiting-based implicit large eddy simulation, *Journal of Fluids Engineering*, 2007, 129: 1483-1492.
- [134] Grinstein, F. F. and Drikakis, D., Computing turbulent flow dynamics with implicit large eddy simulation, *Journal of Fluids Engineering*, 2007, 129: 1481-1482.
- [135] Gaitonde, D. V. and Visbal, M. R., High-order schemes for Navier-Stokes equations: algorithm and implementation into FDL3DI, AFRL-VA-WP-TR-1998-3060, 1998.
- [136] Visbal, M. R. and Gaitonde, D. V., High-order-accurate methods for complex unsteady subsonic flows, *AIAA Journal*, 1999, 37: 1231-1239.
- [137] Gaitonde, D. V. and Visbal, M. R., Padé-type high-order boundary filters for the Navier-Stokes equations, *AIAA Journal*, 2000, 38: 2103-2112.
- [138] Visbal, M. R. and Gaitonde, D. V., On the use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes, *Journal of Computational Physics*, 2002, 181: 155-185.
- [139] Morgan, P., Visbal, M. and Rizzetta, D., A parallel overset grid high-order flow solver for large eddy simulation, *Journal of Scientific Computing*, 2006, 29(2): 165-200.
- [140] Rizzetta, D. P., Visbal, M. R. and Gaitonde, D. V., Large-eddy simulation of supersonic compression-ramp flow by high-order method, *AIAA Journal*, 2001, 39: 2283-2292.
- [141] Rizzetta, D. P. and Visbal, M. R., Application of large-eddy simulation to supersonic compression ramps, *AIAA Journal*, 2002, 40: 1574-1581.
- [142] Visbal, M. R. and Rizzetta, D. P., Large-eddy simulation on curvilinear grids using compact differencing and filtering schemes, *Journal of Fluids Engineering*, 2002, 124: 836-847.
- [143] Rizzetta, D. P., Visbal, M. R. and Blaisdell, G. A., A time-implicit high-order compact differencing and filtering scheme for large-eddy simulation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*,

- 2003, 42: 665-693.
- [144] Rizzetta, D. P. and Visbal, M. R., Large-eddy simulation of supersonic cavity flowfields including flow control, *AIAA Journal*, 2003, 41(8): 1452-1462.
- [145] Visbal, M., Morgan, P., and Rizzetta, D., An implicit LES approach based on high-order compact differencing and filtering schemes, *AIAA Paper 2003-4098*, 2003.
- [146] Gordnier, R. E. and Visbal, M. R., Compact difference scheme applied to simulation of low-sweep delta wing flow, *AIAA Journal*, 2005, 43(8): 1744-1752.
- [147] Morgan, P. E., Rizzetta, D. P. and Visbal, M. R., Large-eddy simulation of separation control for flow over a wall-mounted hump, *AIAA Paper 2005-5017*, 2005.
- [148] Rizzetta, D. P. and Visbal, M. R., Numerical simulation of separation control for transitional highly loaded low-pressure turbines, *AIAA Journal*, 2005, 43(9): 1958-1967.
- [149] Rizzetta, D. P. and Visbal, M. R., Numerical study of active flow control for a transitional highly loaded low-pressure turbine, *Journal of Fluids Engineering*, 2006, 128: 956-967.
- [150] Matsuura, K. and Kato, C., Large-eddy simulation of compressible transitional flows in a low-pressure turbine cascade, *AIAA Journal*, 2007, 45: 442-457.
- [151] Kawai, S. and Fujii, K., Compact scheme with filtering for large-eddy simulation of transitional boundary layer, *AIAA Journal*, 2008, 46: 690-700.
- [152] Bogey, C. and Bailly, C., A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations, *Journal of Computational Physics* 2004, 194: 194-214.
- [153] Berland, J., Bogey, C., Marsden, O., et al., High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems, *Journal of Computational Physics*, 2007, 224: 637-662.
- [154] Bogey, C. and Bailly, C., Decrease of the effective Reynolds number with eddy-viscosity subgrid-scale modeling, *AIAA Journal*, 2005, 43(2): 437-439.
- [155] Bogey, C. and Bailly, C., Large eddy simulations of round free jets using explicit filtering with/without dynamic Smagorinsky model, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2006, 27: 603-610.

- [156] Bogey, C. and Bailly, C., Computation of a high Reynolds number jet and its radiated noise using large eddy simulation based on explicit filtering, *Computers & Fluids*, 2006, 35: 1344-1358.
- [157] Bogey, C. and Bailly, C., Large eddy simulations of transitional round jets: influence of the Reynolds number on flow development and energy dissipation, *Physics of Fluids*, 2006, 18(065101): 1-14.
- [158] Berland, J., Bogey, C. and Bailly, C., Numerical study of screech generation in a planar supersonic jet, *Physics of Fluids*, 2007, 19(075105): 1-14.
- [159] Marsden, O., Bogey, C. and Bailly, C., High-order curvilinear simulations of flows around non-Cartesian bodies, *Journal of Computational Acoustics*, 2005, 13: 731-748.
- [160] Marsden, O., Bogey, C. and Bailly, C., Direct noise computation of the turbulent flow around a zero-incidence airfoil, *AIAA Journal*, 2008, 46: 874-883.
- [161] Geurts, B. J., Inverse modeling for large-eddy simulation, *Physics of Fluids*, 1997, 9: 3585-3587.
- [162] Stolz, S. and Adams, N. A., An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulations, *Physics of Fluids*, 1999, 11: 1699-1701.
- [163] Stolz, S., Adams, N. A. and Kleiser, L., An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wall-bounded flows, *Phys. Fluids*, 2001, 13: 997-1015.
- [164] Stolz, S., Adams, N. A. and Kleiser, L., The approximate deconvolution model for large-eddy simulations of compressible flows and its application to shock-turbulent-boundary-layer interaction, *Phys. Fluids*, 2001, 13: 2985-3001.
- [165] von Kaenel, R., Adams, N. A., Kleiser, L., et al., The approximate deconvolution model for large-eddy simulation of compressible flows with finite volume schemes, *Journal of Fluids Engineering*, 2003, 125: 375-381.
- [166] Stolz, S. and Adams, N. A., Large-eddy simulation of high-Reynolds-number supersonic boundary layers using the approximate deconvolution model and a rescaling and recycling technique, *Physics of Fluids*, 2003, 15: 2398-2412.
- [167] Schlatter, P., Stolz, S. and Kleiser, L., LES of transitional flows using the approximate deconvolution model, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2004, 25: 549-558.

- [168] Stolz, S., Schlatter, P. and Kleiser, L., Large-eddy simulations of subharmonic transition in a supersonic boundary layer, *AIAA Journal*, 2007, 45: 1019-1027.
- [169] Rembold, B. and Kleiser, L., Noise prediction of a rectangular jet using large-eddy simulation, *AIAA Journal*, 2004, 42: 1823-1831.
- [170] Adams, N. A. and Stolz, S., A subgrid-scale deconvolution approach for shock capturing, *Journal of Computational Physics*, 2002, 178: 391-426.
- [171] von Kaenel, R., Kleiser, L., Adams, N. A., et al., Large-eddy simulation of shock-turbulence interaction, *AIAA Journal*, 2004, 42: 2516-2528.
- [172] Loginov, M. S., Adams, N. A. and Zheltovodov, A. A., Large-eddy simulation of shock-wave/turbulent-boundary-layer interaction, *J. Fluid Mech.*, 2006, 565: 135-169.
- [173] Vremana, A. W., An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow: algebraic theory and applications, *Phys. Fluids*, 2004, 16: 3670-3681.
- [174] Park, N., Lee, S., Lee, J., et al., A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model with a global model coefficient, *Phys. Fluids*, 2006, 18(125109): 1-24.
- [175] You, D. and Moin, P., A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries, *Phys. Fluids*, 2007, 19(065110): 1-8.
- [176] Gravemeier, V., A consistent dynamic localization model for large eddy simulation of turbulent flows based on a variational formulation, *Journal of Computational Physics*, 2006, 218: 677-701.
- [177] 崔桂香, 周海兵, 张兆顺, 等. 新型大涡数值模拟亚格子模型及应用, *计算物理*, 2004, 21(3): 289-293.
- [178] Cui, G., Zhou, H., Zhang, Z., et al., A new dynamic subgrid eddy viscosity model with application to turbulent channel flow, *Phys. Fluids*, 2004, 16: 2835-2842.
- [179] 张兆顺, 崔桂香, 许春晓, *湍流理论与模拟*, 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [180] Guo, Y., Xu, C., Cui, G., et al., Large eddy simulation of scalar turbulence using a new subgrid eddy diffusivity model, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2007, 28: 268-274.
- [181] Shao, L., Zhang, Z., Cui, G., et al., Subgrid modeling of anisotropic rotating homogeneous turbulence, *Phys. Fluids*, 2005, 17(115106): 1-7.
- [182] Cui, G., Xu, C., Fang, L., et al., A new subgrid eddy-viscosity model for large-eddy simulation of anisotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, 2007, 582: 377-397.

- [183] Piomelli, U., Ferziger, J., Moin, P., et al., New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows, *Phys. Fluids A*, 1989, 1: 1061-1068.
- [184] Cabot, W. and Moin, P., Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow, *Flow, Turbulence and Combustion*, 2000, 63: 269-291.
- [185] Catalano, P., Wang, M., Iaccarino, G., et al., Numerical simulation of the flow around a circular cylinder at high Reynolds numbers, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2003, 24: 463-469.
- [186] Templeton, J. A., Wang, M. and Moin, P., An efficient wall model for large-eddy simulation based on optimal control theory, *Phys. Fluids*, 2006, 18(025101): 1-13.
- [187] Breuer, M., Kniazev, B. and Abel, M., Development of wall models for LES of separated flows using statistical evaluations, *Computers & Fluids*, 2007, 36: 817-837.
- [188] Fureby, C., Alin, N., Wikström, N., et al., Large-eddy simulation of high-Reynolds-number wall-bounded flows, *AIAA Journal*, 2004, 42: 457-468.
- [189] Fureby, C., ILES and LES of complex engineering turbulent flows, *Journal of Fluids Engineering*, 2007, 129: 1514-1523.
- [190] Nakamori, I. and Ikohagi, T., Dynamic hybridization of MILES and RANS for predicting airfoil stall, *Computers & Fluids*, 2008, 37: 161-169.
- [191] Urbin, G., Knight, D. and Zheltovodov, A. A., Compressible large eddy simulation using unstructured grid: supersonic turbulent boundary layer and compression corner, *AIAA Paper 99-0427*, 1999.
- [192] Kawai, S. and Lele, S. K., Localized artificial viscosity and diffusivity scheme for capturing discontinuities on curvilinear and anisotropic meshes, *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University*, 2007.
- [193] Kawai, S. and Lele, S. K., Mechanisms of jet mixing in a supersonic crossflow: a study using large-eddy simulation, *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University*, 2007.
- [194] Kobayashi, T., Large eddy simulation for engineering applications, *Fluid Dynamics Research*, 2006, 38: 84-107.
- [195] Kassinos, S. C., Langer, C. A., Iaccarino, G., et al., Complex effects in large eddy

- simulations, Berlin: Springer-Verlag, 2007.
- [196] You, D., Study of tip clearance flow in a turbomachinery cascade using large eddy simulation, Stanford: Stanford University, 2004.
- [197] You, D., Mittal, R., Wang, M., et al., Computational methodology for large-eddy simulation of tip-clearance flows, *AIAA Journal*, 2004, 42: 271-279.
- [198] You, D., Wang, M., Moin, P., et al., Effects of tip-gap size on the tip-leakage flow in a turbomachinery cascade, *Phys. Fluids*, 2006, 18(105102): 1-14.
- [199] You, D., Wang, M., Moin, P., et al., Vortex dynamics and low-pressure fluctuations in the tip-clearance flow, *Journal of Fluids Engineering*, 2007, 129: 1002-1014.
- [200] You, D., Wang, M., Moin, P., et al., Large-eddy simulation analysis of mechanisms for viscous losses in a turbomachinery tip-clearance flow, *J. Fluid Mech.*, 2007, 586: 177-204.
- [201] Pitsch, H., Large-Eddy simulation of turbulent combustion, *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 2006, 38: 453-482.
- [202] Moin, P. and Apte, S., Large-eddy simulation of realistic gas turbine combustors, *AIAA Journal*, 2006, 44: 698-708.
- [203] Boileau, M., Staffelbach, G., Cuenot, B., et al., LES of an ignition sequence in a gas turbine engine, *Combustion and Flame*, 2008, 154: 2-22.
- [204] Abhari, R. S., Unsteady fluid dynamics of turbines: perspective on possible directions to improve future engine designs, *Proceedings of Minnowbrook V - 2006 Workshop on Unsteady Flows in Turbomachinery (NASA/CP-2006-214484)*, New York, 2006.
- [205] Meyer, R. X., The effects of wakes on the transient pressure and velocity distributions in turbomachines, *J. Basic Eng.*, 1958, 80: 1544-1552.
- [206] Smith, L. H., Wake dispersion in turbomachines, *J. Basic Eng.*, 1966, 88: 688-690.
- [207] Stieger, R. D. and Hodson, H. P., The unsteady development of a turbulent wake through a downstream low-pressure turbine blade passage, *ASME Paper GT-2004-53061*, 2004.
- [208] Walker, G. J., The role of laminar-turbulent transition in gas turbine engines: a discussion, *ASME Paper 92-GT-301*, 1992.
- [209] Halstead, D. E., Wisler, D. C., Okiishi, T. H., et al., Boundary layer development in

- axial compressors and turbines, part 1 of 4: composite picture, ASME Paper 95-GT-461, 1995.
- [210] White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, 2nd Edition, New York: McGraw-Hill, 1991.
- [211] Matsubara, M. and Alfredsson, P. H., Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence, *J. Fluid Mech.*, 2001, 430: 149-168.
- [212] Jacobs, R. G. and Durbin, P. A., Simulations of bypass transition, *J. Fluid Mech.*, 2001, 428: 185-212.
- [213] Emmons, H. W., The laminar-turbulent transition in a boundary layers, Part 1, *J. Aeronau. Sci.*, 1951, 18: 490-498.
- [214] Schubauer, G. B. and Klebanoff, P. S., Contributions on the mechanics of boundary layer transition, NACA TN 3489, 1955.
- [215] Chong, T. P. and Zhong, S., On the three-dimensional structure of turbulent spots, *Journal of Turbomachinery*, 2005, 127: 545-551.
- [216] Chong, T. P. and Zhong, S., On the momentum and thermal structures of turbulent spots in a favorable pressure gradient, *Journal of Turbomachinery*, 2006, 128: 689-698.
- [217] Schröder, A. and Kompenhans, J., Investigation of a turbulent spot using multi-plane stereo particle image velocimetry, *Experiments in Fluids*, 2004, 36: 82-90.
- [218] Cantwell, B., Coles, D. and Dimotakis, P., Structure and entrainment in the plane of symmetry of a turbulent spot, *J. Fluid Mech.*, 1978, 87: 641-672.
- [219] Horton, H. P., *Laminar separation in two and three-dimensional incompressible flow*, London: University of London, 1968.
- [220] Zhang, X., Experimental study of unsteady wake-induced boundary layer transition in turbomachinery, Lecture presentations on ‘Unsteady flows in high-lift low-pressure turbines’, Beijing: Beihang University, 2004.
- [221] Roberts W. B., Calculation of laminar separation bubbles and their effect on airfoil performance, *AIAA J.*, 1980, 18: 25-31.
- [222] Hatman, A. and Wang, T., A prediction model for separated-flow transition, *Journal of Turbomachinery*, 1999, 121: 594-602.
- [223] Hourmouziadis, J., Aerodynamic design of low pressure turbines, AGARD Lecture Series 167, 1989.

- [224] Alam, M. and Sandham, N. D., Direct numerical simulation of 'short' laminar separation bubbles with turbulent reattachment, *J. Fluid Mech.*, 2000, 403: 223-250.
- [225] Spalart, P. R. and Strelets, M. Kh., Mechanisms of transition and heat transfer in a separation bubble, *J. Fluid Mech.*, 2000, 403: 329-349.
- [226] Yang, Z. and Voke, P. R., Large-eddy simulation of boundary-layer separation and transition at a change of surface curvature, *J. Fluid Mech.*, 2001, 439: 305-333.
- [227] Abdalla, I. E. and Yang, Z., Numerical study of the instability mechanism in transitional separating-reattaching flow, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2004, 25: 593-605.
- [228] Malkiel, E. and Mayle, R. E., Transition in a separation bubble, *Journal of Turbomachinery*, 1996, 118: 752-759.
- [229] Wissink, J. G. and Rodi, W., DNS of a laminar separation bubble affected by free-stream disturbances, in *Direct and Large-Eddy Simulation V*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [230] Roberts, S. K. and Yaras, M. I., Effects of periodic unsteadiness, free-stream turbulence and flow Reynolds number on separation-bubble transition, *ASME Paper GT-2003-38626*, 2003.
- [231] McAuliffe, B. R. and Yaras, M. I., Numerical study of instability mechanisms leading to transition in separation bubbles, *ASME Paper GT-2006-91018*, 2006.
- [232] McAuliffe, B. R. and Yaras, M. I., Numerical study of turbulent spot development in a separated shear layer, *ASME Paper GT-2007-27604*, 2007.
- [233] McAuliffe, B. R. and Yaras, M. I., Transition mechanisms in separation bubbles under low and elevated freestream turbulence, *ASME Paper GT-2007-27605*, 2007.
- [234] Yang, Z. and Abdalla, I. E., Effects of free-stream turbulence on large-scale coherent structures of separated boundary layer transition, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2005, 49: 331-348.
- [235] Raverdy, B., Mary, I., Sagaut, P., et al., High-resolution large-eddy simulation of flow around low-pressure turbine blade, *AIAA J.*, 2003, 41: 390-397.
- [236] Gross, A. and Fasel, H. F., Numerical investigation of low-pressure turbine blade separation control, *AIAA Journal*, 2005, 43: 2514-2525.
- [237] Huai, X., Joslin, R. D. and Piomelli, U., Large-eddy simulation of transition to

- turbulence in boundary layers, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 1997, 9: 149-163.
- [238] Huai, X., Joslin, R. D. and Piomelli, U., Large-eddy simulation of boundary-layer transition on a swept wedge, *J. Fluid Mech.*, 1999, 381: 357-380.
- [239] Péneau, F., Boisson, H. C., Kondjoyan, A., et al., Structure of a flat plate boundary layer subjected to free-stream turbulence, *Int. J. Comput. Fluid Dynamics*, 2004, 18(2): 175-188.
- [240] Schlatter, P. C., Large-eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow, Diss. ETH No. 16000, Zurich: Swiss Federal Institute of Technology, 2005.
- [241] Addison, J. S. and Hodson, H. P., Modeling of unsteady transitional boundary layers, *Journal of Turbomachinery*, 1992, 114: 580-589.
- [242] Zhong, S., Kittichaikarn, C., Hodson, H. P., et al., A study of unsteady wake-induced boundary layer transition with thermochromic liquid crystals, International conference on optical methods and data processing in heat and fluid flow, London: IMechE Press, 1998.
- [243] Wu, X., Jacobs, R. G., Hunt, J. C. R., et al., Simulation of boundary layer transition induced by periodically passing wakes, *J. Fluid Mech.*, 1999, 398: 109-153.
- [244] Stieger, R. D. and Hodson, H. P., Unsteady dissipation measurements on a flat plate subject to wake passing, Proceedings of 5th European conference on turbomachinery fluid dynamics and thermodynamics, Czech: ASI, 2003.
- [245] Stieger, R. D. and Hodson, H. P., The transition mechanism of highly-loaded LP turbine blades, ASME Paper GT-2003-38304, 2003.
- [246] Stieger, R. D., Hollis, D. and Hodson, H. P., Unsteady surface pressures due to wake-induced transition in a laminar separation bubble on a LP turbine cascade, ASME Paper GT-2003-38303, 2003.
- [247] Sarkar, S. and Voke, P. R., Large-eddy simulation of unsteady surface pressure over a LP turbine blade due to interactions of passing wakes and inflexional boundary layer, ASME Paper GT-2005-68867, 2005.
- [248] Xiong, Z., Stagnation point flow and heat transfer under free-stream turbulence, Stanford: Stanford University, 2004.
- [249] Tannehill, J. C., Anderson, D. A. and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics*

- and Heat transfer, 2nd Edition, Washington: Taylor & Francis, 1997.
- [250] 吴子牛, 计算流体力学基本原理, 北京: 科学出版社, 2001.
- [251] Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H., Large eddy simulation of the turbulent mixing layer, *J. Fluid Mech.*, 1997, 339: 357-390.
- [252] Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H. A priori tests of large eddy simulation of compressible plane mixing layer, *J. Eng. Math.*, 1995, 29:299-327.
- [253] Lenormand, E., Sagaut, P. and Ta Phuoc, L., Large eddy simulation of subsonic and supersonic channel flow at moderate Reynolds number, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2000, 32: 369-406.
- [254] Lenormand, E., Sagaut, P., Ta Phuoc, L., et al., Subgrid-scale models for large-eddy simulations of compressible wall bounded flows, *AIAA J.*, 2000, 38(8): 1340-1350.
- [255] Wilson, P. G. and Pauley, L. L., Two- and three-dimensional large-eddy simulations of a transitional separation bubble, *Phys. Fluids*, 1998, 10(11): 2932-2940.
- [256] Knight, D., Zhou, G., Okong'o, N., et al., Compressible large eddy simulation using unstructured grids, *AIAA Paper 98-0535*, 1998.
- [257] Blazek, J., *Computational fluid dynamics: principles and applications*, 2nd Edition, Amsterdam: Elsevier, 2005.
- [258] Lele, S. K., Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *Journal of Computational Physics*, 1992, 103: 16-42.
- [259] Tam, C. K. W. and Webb, J. C., Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics, *Journal of Computational Physics*, 1993, 107: 262-281.
- [260] Daude, F., Emmert, T., Lafon, P., et al., A high-order algorithm for compressible LES in CAA applications, *AIAA Paper 2008-3049*, 2008.
- [261] Mittal, R. and Moin, P., Suitability of upwind-biased finite-difference schemes for large-eddy simulation of turbulent flows, *AIAA Journal*, 1997, 35: 1415-1417.
- [262] Ducros, F., Laporte, F., Soulères, T., et al., High-order fluxes for conservative skew-symmetric-like schemes in structured meshes: application to compressible flows, *Journal of Computational Physics*, 2000, 116:114-139.
- [263] Jameson, A., Schmidt, W. and Turkel, W., Numerical solutions of the Euler equations

- by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes, AIAA Paper 81-1259, 1981.
- [264] Swanson, R. C. and Turkel, E., On central-difference and upwind schemes, *Journal of Computational Physics*, 1992, 101:292-306.
- [265] Turkel, E. and Vatsa, V. N., Effect of artificial viscosity on three-dimensional flow solutions, *AIAA Journal*, 1994, 32: 39-45.
- [266] Vos, J. B., Leyland, P., van Kemenade, V., et al., NSMB handbook 4.5, 1999.
- [267] Colonius, T., Modeling artificial boundary conditions for compressible flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2004, 36:315-345.
- [268] Xu, S. and Martin, M., Assessment of inflow boundary conditions for compressible turbulent boundary layers, *Phys. Fluids*, 2004, 16: 2623-2639.
- [269] Poinso, T. J. and Lele, S. K., Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows, *Journal of Computational Physics*, 1992, 101: 104-129.
- [270] Kim, J. and Lee, D., Generalized characteristic boundary conditions for computational acoustics, *AIAA Journal*, 2000, 38: 2040–2049.
- [271] Kim, J. and Lee, D., Generalized Characteristic Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics, Part 2, *AIAA Journal*, 2004, 42: 47-55.
- [272] Selle, L., Nicoud, F. and Poinso, T., Actual impedance of nonreflecting boundary conditions: implications for computation of resonators, *AIAA Journal*, 2004, 42: 958-964.
- [273] Chen, X. and Zha, G.-C., Implicit application of non-reflective boundary conditions for Navier-Stokes equations in generalized coordinates, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2006, 50: 767–793.
- [274] Polifke, W., Wall, C. and Moin, P., Partially reflecting and non-reflecting boundary conditions for simulation of compressible viscous flow, *Journal of Computational Physics*, 2006, 213: 437-449.
- [275] Hirsch, C., Numerical computation of internal and external flows, Vol. 2: computational methods for inviscid and viscous flows, Chichester: John Wiley & Sons, 1990.
- [276] Bodony, D. J., Analysis of sponge zones for computational fluid mechanics, *Journal of Computational Physics*, 2006, 212: 681-702.

- [277] Rembold, B., Direct and large-eddy simulation of compressible rectangular jet flow, Diss. ETH No. 15081, Zurich: Swiss Federal Institute of Technology, 2003.
- [278] Suh, J., Frankel, S. H., Mongeau, L., et al., Compressible large eddy simulations of wall-bounded turbulent flows using a semi-implicit numerical scheme for low Mach number aeroacoustics, *Journal of Computational Physics*, 2006, 215: 526-551.
- [279] Bodony, D. J., Aeroacoustic prediction of turbulent free shear flows, Stanford: Stanford University, 2004.
- [280] Andersson, N., A study of Mach 0.75 jets and their radiated sound using large-eddy simulation, Göteborg: Chalmers University of Technology, 2003.
- [281] Colonius, T., Lele, S. K. and Moin, P., Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation, *AIAA Journal*, 1993, 31(9): 1574-1582.
- [282] Lui, C., A numerical investigation of shock-associated noise, Stanford: Stanford University, 2003.
- [283] Bogey, C. and Bailly, C., Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations: far field formulation and validation test cases, *Acta Acustica united with Acustica*, 2002, 88: 463-471.
- [284] Gloerfelt, X. and Lafon, P., Direct computation of the noise induced by a turbulent flow through a diaphragm in a duct at low Mach number, *Computers & Fluids*, 2008, 37: 388-401.
- [285] Yao, J., Jameson, A., Alonso, J. J., et al., Development and validation of a massively parallel flow solver for turbomachinery flows, *Journal of Propulsion and Power*, 2001, 17: 659-668.
- [286] 都志辉, 高性能计算并行编程技术——MPI 并行程序设计, 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [287] 莫则尧, 袁国兴, 消息传递并行编程环境 MPI, 北京: 科学出版社, 2001.
- [288] Haller, G., An objective definition of a vortex, *J. Fluid Mech.*, 2005, 525: 1-26.
- [289] Chakraborty, P., Balachandar, S. and Adrian, R. J., On the relationships between local vortex identification schemes, *J. Fluid Mech.*, 2005, 535: 189-214.
- [290] Wu, J.-Z., Xiong, A.-K. and Yang, Y.-T., Axial stretching and vortex definition, *Phys. Fluids*, 2005, 17(038108): 1-4.

- [291] Zhang, S. and Choudhury, D., Eigen helicity density: A new vortex identification scheme and its application in accelerated inhomogeneous flows, *Phys. Fluids*, 2006, 18(058104): 1-4.
- [292] Alfonsi, G., Coherent structures of turbulence: methods of eduction and results, *Applied Mechanics Reviews*, 2006, 59: 307-323.
- [293] Chong, M. S., Perry, A. E. and Cantwell, B. J., A general classification of three-dimensional flow fields, *Phys. Fluids A*, 1990, 2: 765-777.
- [294] Hunt, J. C. R., Wray, A. A. and Moin, P., Eddies, stream and convergence zones in turbulent flows, *Proceedings of the 1988 Summer Program, Center for Turbulence Research, Stanford University*, 1988.
- [295] Dubief, Y. and Delcayre, F., On coherent-vortex identification in turbulence, *Journal of Turbulence*, 2000, 1(011): 1-22.
- [296] Jeong, J. and Hussain, F., On the identification of a vortex, *J. Fluid Mech.*, 1995, 285: 69-94.
- [297] Cucitore, R., Quadrio, M. and Baron, A., On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 1999, 18: 261-282.
- [298] Scotti, A., Meneveau, C. and Lilly, D. K., Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids, *Phys. Fluids A*, 1993, 5: 2306-2308.
- [299] Breuer, M., Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modeling aspects, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1998, 28: 1281-1302.
- [300] Moser, R. D., Kim, J. and Mansour, N. N., Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau=590$, *Phys. Fluids*, 1999, 11(4): 943-945.
- [301] Williamson, C. H. K., Vortex dynamics in the cylinder wake, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1996, 28: 477-539.
- [302] Coleman, G. N., Kim, J. and Moser, R. D., A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow, *J. Fluid Mech.*, 1995, 305: 159-183.
- [303] Huang, P. G., Coleman, G. N. and Bradshaw, P., Compressible turbulent channel flows: DNS results and modeling, *J. Fluid Mech.*, 1995, 305: 185-218.
- [304] Gamet, L., Ducros, F., Nicoud, F., et al., Compact finite difference schemes on non-uniform meshes, application to direct numerical simulations of compressible flows.

- Int. J. Numer. Meth. Fluids, 1999, 29: 159-191.
- [305] Mossi, M. and Sagaut, P., Numerical investigation of fully developed channel flow using shock-capturing schemes, *Computers & Fluids*, 2003, 32: 249-274.
- [306] 李新亮, 马延文, 傅德薰, 可压槽道湍流的直接数值模拟及标度律分析, *中国科学 (A 辑)*, 2001, 31(2): 153-164.
- [307] 李新亮, 槽道湍流的直接数值模拟, 北京: 中国科学院力学研究所, 2001.
- [308] Orlandi, P., *Fluid flow phenomena: a numerical toolkit*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [309] 陶文铨, 计算传热学的近代进展, 北京: 科学出版社, 2000.
- [310] von Kaenel, R., Large-eddy simulation of compressible flows using the finite volume method, Diss. ETH No. 15255, Zurich: Swiss Federal Institute of Technology, 2003.
- [311] Jimenez, J. and Moin, P., The minimal flow unit in near-wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, 1991, 225: 213-240.
- [312] Dean, R. B., Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow, *Journal of Fluids Engineering*, 1978, 100: 215-223.
- [313] Gamet, L. and Estivalezes, J. L., Application of large-eddy simulations and Kirchhoff method to jet noise prediction, *AIAA Journal*, 1998, 36(12): 2170-2178.
- [314] Bui, T. T., A parallel, finite-volume algorithm for large-eddy simulation of turbulent flows, *Computers & Fluids*, 2000, 29: 877-915.
- [315] Urbin, G. and Knight D., Large-eddy simulation of a supersonic boundary layer using an unstructured grid, *AIAA Journal*, 2001, 39(7): 1288-1295.
- [316] Zhao, W., Frankel, S. H. and Mongeau, L., Large eddy simulations of sound radiation from subsonic turbulent jets, *AIAA Journal*, 2001, 39(8): 1469-1477.
- [317] DeBonis, J. R. and Scott, J. N., Large-eddy simulation of a turbulent compressible round jet, *AIAA Journal*, 2002, 40(7): 1346-1354.
- [318] Garnier, E., Sagaut, P. and Deville, M., Large eddy simulation of shock/boundary-layer interaction, *AIAA Journal*, 2002, 40(10): 1935-1944.
- [319] Sandham, N. D., Yao, Y. F. and Lawal, A. A., Large-eddy simulation of transonic turbulent flow over a bump, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2003, 24: 584-595.

- [320] Larchevêque, L., Sagaut, P., Mary, I., et al., Large-eddy simulation of a compressible flow past a deep cavity, *Phys. Fluids*, 2003, 15(1): 193-210.
- [321] Lee, J. S., Meng, N., Pletcher, R. H., et al., Numerical study of the effects of rotation on heat transfer in channels with and without ribs, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, 47: 4673-4684.
- [322] Andersson, N., Eriksson, L.-E. and Davidson, L., Large-eddy simulation of subsonic turbulent jets and their radiated sound, *AIAA Journal*, 2005, 43(9): 1899-1912.
- [323] Lumley, J. L., *Stochastic tools in turbulence*, New York: Academic Press, 1970.
- [324] Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A., et al., The structure of turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 1967, 30: 741-773.
- [325] Smits, A. J. and Dussauge, J.-P., *Turbulent shear layers in supersonic flow*, 2nd Edition, New York: Springer, 2006.
- [326] Berger, E. and Wille, R., Periodic flow phenomena, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1972, 4: 313-340.
- [327] Zdravkovich, M. M., *Flow around circular cylinders*, Vol. 1: Fundamentals, Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [328] Zdravkovich, M. M., *Flow around circular cylinders*, Vol. 2: Applications, Oxford: Oxford University Press, 2003.
- [329] Kravchenko, A. G. and Moin, P., Numerical studies of flow over a circular cylinder at $Re_D=3900$, *Phys. Fluids*, 2000, 12(2): 403-417.
- [330] Beaudan, P. and Moin, P., Numerical experiments on the flow past a circular cylinder at sub-critical Reynolds number, Report No. TF-62, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1994.
- [331] Ong, L. and Wallace, J., The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder, *Experiments in Fluids*, 1996, 20: 441-453.
- [332] Wallace, J., Ong, L. and Moin, P., The velocity and vorticity fields of the turbulent near wake of a circular cylinder, NASA-TM-110513, 1995.
- [333] Mittal, R., Large-eddy simulation of flow past a circular cylinder, Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford University, 1995.
- [334] Mittal, R., Progress on LES of flow past a circular cylinder, Annual Research Briefs,

- Center for Turbulence Research, Stanford University, 1996.
- [335] Breuer, M., Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modeling aspects, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1998, 28: 1281-1302.
- [336] Breuer, M., Numerical and modeling influences on large eddy simulations for the flow past a circular cylinder, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 1998, 19: 512-521.
- [337] Breuer, M., A challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 2000, 21: 648-654.
- [338] Franke, J. and Frank, W., Large-eddy simulation of the flow past a circular cylinder at $Re_D=3900$, *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, 2002, 90: 1191-1206.
- [339] Ma, X., Karamanos, G-S. and Karniadakis, G. E., Dynamics and low-dimensionality of a turbulent near wake, *J. Fluid Mech.*, 2000, 410: 29-65.
- [340] Dong, S., Karniadakis, G. E., Ekmekci, A., et al., A combined direct numerical simulation – particle image velocimetry study of the turbulent near wake, *J. Fluid Mech* 2006, 569: 185-207.
- [341] Hsu, K. and Lee, S. L., A numerical technique for two-dimensional grid generation with grid control at all of the boundaries, *Journal of Computational Physics*, 1991, 96: 451-469.
- [342] Stadtmüller, P., Investigation of wake-induced transition on the LP turbine cascade T106D-EIZ, Test Case Documentation Version 1.1, Universität der Bundeswehr München, 2001.
- [343] Stadtmüller, P. and Fottner, L., A test case for the numerical investigation of wake passing effects on a highly loaded LP turbine cascade blade, ASME Paper 2001-GT-0311, 2001.
- [344] Cardamone, P., Stadtmüller, P. and Fottner, L., Numerical investigation of the wake-boundary layer interaction on a highly loaded LP turbine cascade blade, ASME Paper GT-2002-30367, 2002.
- [345] Samtaney R., Pullin, D. I. and Kosović, B., Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics, *Phys. Fluids*, 2001, 13: 1415-1430.
- [346] 李新亮, 傅德薰, 马延文, 可压缩均匀各向同性湍流的直接数值模拟, *中国科学*, 2002, 32: 716-724.

- [347] Rogallo, R. S., Numerical experiments in homogeneous turbulence, NASA-TM-81315, 1981.
- [348] Ghosal, S. and Rogers, M. M., A numerical study of self-similarity in a turbulent plane wake using large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, 1997, 9: 1729-1739.
- [349] Moser, R. D., Rogers, M. M. and Ewing, D. W., Self-similarity of time-evolving plane wakes, *J. Fluid Mech*, 1998, 367: 255-289.
- [350] Wu, J., Ma, H. and Zhou, M., *Vorticity and vortex dynamics*, Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [351] 陆宏志, 叶轮机叶片前缘流动和前缘形状优化, 北京: 北京航空航天大学, 2003.
- [352] Greitzer, E. M., Tan, C. S. and Graf, M. B., *Internal flow: concepts and applications*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [353] Hodson, H. P. and Dawes, W. N., On the interpretation of measured profile losses in unsteady wake-turbine blade interaction studies, *Journal of Turbomachinery*, 1998, 120: 276-284.

附录A MPLES 程序说明

多块并行大涡模拟求解系统（Multiblock Parallel Large-eddy Simulation，简称 MPLES，版本 1.0，软件著作权登记号：2008SRBJ0578）是一款采用多块结构化网格、并行化的可压缩流动大涡模拟求解器，其主要特点如下：

- 系统由前处理、并行计算、后处理三大模块组成，通过在前/后处理模块提供与商业软件的接口，形成了一套较为完善的计算流体力学整体解决方案；
- 采用界面匹配的多块结构化网格技术，可以处理具有复杂几何边界的流动问题；
- 通过计算域分解实现程序并行，针对大小不同的多块网格，前处理部分可以对网格块进行剖分与组合，使各个进程总的网格单元数接近相等，实现负载平衡；
- 亚格子模型采用目前使用最为广泛的动力模型，可以比较准确的模拟分离、转捩等复杂流动现象，计算精度较高；
- 提供了包括自由流湍流、周期性尾迹在内的丰富边界条件，对真实物理环境有较强的模拟能力。

发展 MPLES 的主要目的，是用于叶轮机内部复杂非定常流动现象的机理研究；同时，MPLES 也有能力对其他常见的内/外流问题进行准确的模拟。

MPLES 的开发语言为 Fortran 90/95（Intel Fortran Compiler 9.1 for Linux），程序并行采用 MPI-1 标准（MPICH-1.2.7p1 for Unix）实现，软件运行环境为：

- 硬件环境：各类并行机群或单机，单机条件下，计算机需具备多核或多路 CPU；
- 软件环境：Linux 或 Windows 操作系统，支持 MPI-1 标准的并行环境，支持 Fortran 90/95 标准的 Fortran 编译器。

A.1 MPLES 的总体结构

众所周知，成熟的 CFD 商业软件（如 Fluent、CFX、Numeca 等）通常由前处理、求解器、后处理三大模块组成，其中，前处理的主要功能是几何建模与网格生成，求解器负责解算，后处理则主要用于计算结果的显示。对于 MPLES，并不涉及专门的前/后处理模块，整个系统分成三个部分：前处理（网格剖分与组合、负载平衡）、并行计算、后处理（流场统计及输出），如图 118 虚线框内部分所示，显然，这里的前/后处理与上述 CFD 商业软件的前/后处理含义并不相同。

图 118 给出了 MPLES 所提供的 CFD 整体解决方案，由于缺少网格生成和结果显示模块，

MPLES在前/后处理部分提供了相应的接口：网格生成可以由商业软件（如ICEM CFD、IGG/Autogrid等）或自编程序完成，MPLES的前处理模块通过接口读入网格数据；后处理模块则将输出的数据按特定格式存储，再由商业软件（如Tecplot、Origin等）进行结果的显示。这样，通过与商业软件的结合，MPLES形成了一套较为完善的计算流体力学整体解决方案。

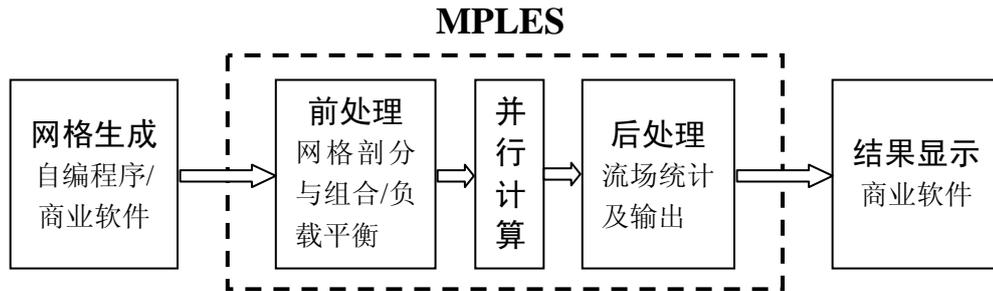


图 118 MPLES 提供的 CFD 整体解决方案

A.2 MPLES 的计算流程

图 119 是MPLES的计算流程图，前处理、并行计算、后处理三个模块的主程序分别是 prep.f90、mples.f90、postp.f90，每个模块均有一个输入控制文件 (*.in)，用于计算参数的设定。计算通常按顺序进行，前一模块的输出作为后一模块的输入，整个计算流程如下：

前处理部分，程序首先读入控制文件 prep.in、网格文件 prep.grd 和初始流场文件 prep.init（若没有则生成缺省初场），prep.in 中需要输入各网格块的边界条件、网格块间的连接关系以及并行计算的进程数目；接下来，根据进程数，程序对网格块进行适当的剖分与组合，使各进程总的网格单元数接近相等，保证计算中的负载平衡，同时，程序还需要计算各子网格块之间的拓扑关系；最后，输出拓扑关系文件 mples.prep、网格文件 mples.grd 和初场文件 mples.init。

并行计算部分，程序读入控制文件 mples.in 以及前处理部分的输出文件 mples.prep、mples.grd、mples.init，mples.in 中主要包含计算参数以及计算过程的控制参数，按照 mples.in 的设定，程序从初场开始计算，流场监测信息不断输出到文件 postp.state.dat，通过监测信息判断流场状态，当流场充分发展以后（与初场无关，进入“真实流动”状态），开始输出瞬态流场文件 postp.field.xxxx（xxxx 是四位数字的文件编号）和瞬态亚格子系数文件 postp.sgs.xxxx。计算过程中，为减少因进程意外中断（断电、系统崩溃等）

而带来的影响，程序还可以输出计算重启文件 `postp.rst.xxxx`，读入重启文件，可以进行续算。当输出的瞬态流场样本数足够多，满足统计要求时，计算停止。

后处理部分，程序读入控制文件 `postp.in`，`postp.in` 中需要输入后处理选项，对于不同的后处理选项，程序可能读入不同的文件（`postp.field.xxxx` 或 `postp.sgs.xxxx`），并且输出不同的结果，如时间平均流场、湍流高阶统计量、瞬态流场截面等等。后处理输出的结果都以特定的格式存储，以便于用商业软件（如 Tecplot、Origin 等）进行计算结果的显示。

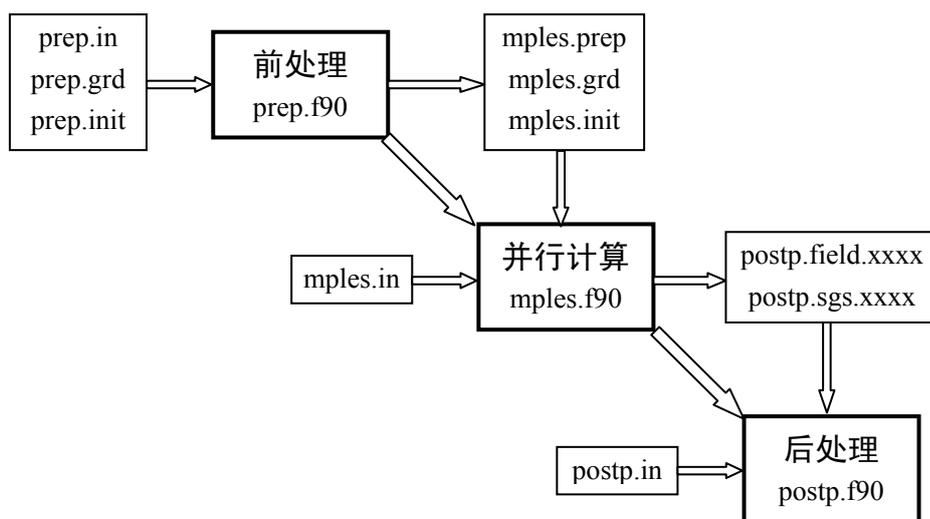


图 119 MPLES 的计算流程图

附录B 不同无量纲化体系间的变换

在第五章和第六章有关低压涡轮叶栅的计算中,共涉及四种工况,其中的三种需要在计算域入口加入背景湍流度和/或周期性尾迹,为了使进口边界条件尽可能的接近实验条件,文中采用的方法是单独计算特定的流场(背景湍流度来源于自由衰减的均匀各向同性湍流场,尾迹则来源于随时间演化的尾迹流场),再将这些流场叠加到计算域入口,以此来模拟背景湍流度或周期性尾迹。

由于本文求解的均是无量纲化的大涡模拟控制方程,在计算均匀各向同性湍流场(或时间演化尾迹流场)和低压涡轮叶栅流场时,都需要选取各自的无量纲化体系,也就是说,二者在计算中选择的特征物理量并不一致,由此导致它们无量纲参数(雷诺数、马赫数等)的取值也不相同。在完成了对均匀各向同性湍流场或时间演化尾迹流场的计算后,由于和低压涡轮叶栅的无量纲化体系不同,需要对这些流场进行适当的变换,然后才能将它们叠加到涡轮叶栅计算域的入口。

本附录B.1节首先推导了两个无量纲化体系之间的一般变换关系,接下来的B.2、B.3节则分别针对来流湍流度、来流尾迹到涡轮叶栅的变换给出具体公式。

B.1 一般的变换关系

对于某一给定的流场,假设其中有量纲的物理量用 L^* 、 u^* 、 ρ^* 、 T^* 等表示,选定两个独立的无量纲化体系1和2,分别对该流场进行无量纲处理。体系1的特征物理量为 L_{r1}^* 、 U_{r1}^* 、 ρ_{r1}^* 、 T_{r1}^* ,无量纲后的物理量用 L_1 、 u_1 、 ρ_1 、 T_1 表示;体系2的特征物理量为 L_{r2}^* 、 U_{r2}^* 、 ρ_{r2}^* 、 T_{r2}^* ,无量纲后的物理量用 L_2 、 u_2 、 ρ_2 、 T_2 表示。按照上述定义,显然有下式:

$$L_1 = \frac{L^*}{L_{r1}^*}, \quad u_1 = \frac{u^*}{U_{r1}^*}, \quad \rho_1 = \frac{\rho^*}{\rho_{r1}^*}, \quad T_1 = \frac{T^*}{T_{r1}^*} \quad (\text{B.1})$$

$$L_2 = \frac{L^*}{L_{r2}^*}, \quad u_2 = \frac{u^*}{U_{r2}^*}, \quad \rho_2 = \frac{\rho^*}{\rho_{r2}^*}, \quad T_2 = \frac{T^*}{T_{r2}^*} \quad (\text{B.2})$$

对于体系1和2,马赫数、雷诺数的取值也不相同,它们的定义如下:

$$Ma_1 = \frac{U_{r1}^*}{\sqrt{\gamma RT_{r1}^*}} \quad (\text{B.3})$$

$$Ma_2 = \frac{U_{r2}^*}{\sqrt{\gamma RT_{r2}^*}} \quad (\text{B.4})$$

$$Re_1 = \frac{\rho_{r1}^* U_{r1}^* L_{r1}^*}{\mu_{r1}^*} \quad (\text{B.5})$$

$$Re_2 = \frac{\rho_{r2}^* U_{r2}^* L_{r2}^*}{\mu_{r2}^*} \quad (\text{B.6})$$

结合式(B.1)和(B.2)容易知道:

$$L^* = L_{r1}^* L_1 = L_{r2}^* L_2 \quad (\text{B.7})$$

$$u^* = U_{r1}^* u_1 = U_{r2}^* u_2 \quad (\text{B.8})$$

$$\rho^* = \rho_{r1}^* \rho_1 = \rho_{r2}^* \rho_2 \quad (\text{B.9})$$

$$T^* = T_{r1}^* T_1 = T_{r2}^* T_2 \quad (\text{B.10})$$

于是有:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_{r2}^*}{L_{r1}^*} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{U_{r2}^*}{U_{r1}^*} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_{r2}^*}{\rho_{r1}^*} \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_{r2}^*}{T_{r1}^*} \quad (\text{B.14})$$

由(B.3)和(B.4)式可知, $U_{r1}^* = Ma_1 \sqrt{\gamma RT_{r1}^*}$, $U_{r2}^* = Ma_2 \sqrt{\gamma RT_{r2}^*}$, 于是:

$$\frac{U_{r1}^*}{U_{r2}^*} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{T_{r1}^*}{T_{r2}^*}} \quad (\text{B.15})$$

结合式(B.12)可以得到:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{U_{r1}^*}{U_{r2}^*} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{T_{r1}^*}{T_{r2}^*}} \quad (\text{B.16})$$

利用(B.5)和(B.6)式有:

$$\frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} = \frac{\rho_{r1}^* U_{r1}^* L_{r1}^* \mu_{r2}^*}{\rho_{r2}^* U_{r2}^* L_{r2}^* \mu_{r1}^*} \quad (\text{B.17})$$

结合(B.15)，上式变为：

$$\frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} = \frac{\rho_{r1}^* Ma_1}{\rho_{r2}^* Ma_2} \sqrt{\frac{T_{r1}^* L_{r1}^* \mu_{r2}^*}{T_{r2}^* L_{r2}^* \mu_{r1}^*}} \quad (\text{B.18})$$

对于粘性系数，利用 Sutherland 公式：

$$\mu_{r1}^* = \mu_0^* \left(\frac{T_{r1}^*}{T_0^*} \right)^{3/2} \frac{(T_0^* + T_S^*)}{(T_{r1}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.19})$$

$$\mu_{r2}^* = \mu_0^* \left(\frac{T_{r2}^*}{T_0^*} \right)^{3/2} \frac{(T_0^* + T_S^*)}{(T_{r2}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.20})$$

其中 $T_S^* = 110.4K$ ，两式相除可以得到：

$$\frac{\mu_{r1}^*}{\mu_{r2}^*} = \left(\frac{T_{r1}^*}{T_{r2}^*} \right)^{3/2} \frac{(T_{r2}^* + T_S^*)}{(T_{r1}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.21})$$

将上式代入(B.18)，于是有：

$$\frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} = \frac{\rho_{r1}^* Ma_1 L_{r1}^* T_{r2}^* (T_{r1}^* + T_S^*)}{\rho_{r2}^* Ma_2 L_{r2}^* T_{r1}^* (T_{r2}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.22})$$

B.2 来流湍流度的变换

来流背景湍流度是通过计算自由衰减的均匀各向同性湍流场得到的，假设计算该流场时使用的是无量纲体系 1，而变换到涡轮叶栅流场后，使用无量纲体系 2。在讨论具体的变换关系前，需要了解自由衰减各向同性湍流的计算过程：该流场的计算域是 $L_1 = 2\pi$ 的立方体，计算中初始流场的密度和温度均设为常数，初始速度场散度为 0 且必须满足预先给定的能谱；由于取初始的密度、温度及声速作为特征物理量，那么显然有马赫数 $Ma_1 = 1$ 且初始流场的密度和温度也都取常数 1；但是，计算的雷诺数 Re_1 和参考温度 T_{r1}^* 却不能任意选取而必须根据体系 1 和 2 的变换关系确定，关于它们的计算公式将在下文推导。当所有参数都确定后，开始进行计算，流场随时间不断演化、衰减，将不同时刻的瞬态流场变换到体系 2 中，由此在涡轮叶栅入口获得的背景湍流度也不断减小，如果某一时刻的湍流度正好等于实验中测得的入口湍流度（本文对照实验 $Tu \approx 2.5\%$ ），那么该时刻的各向同性湍流场就是计算中需要的瞬态场。

在涡轮叶栅所处的体系 2 中，许多计算参数都是已知的，比如雷诺数 Re_2 、马赫数

Ma_2 、参考温度 $T_{r_2}^*$ 等，而叶栅入口平面的流动参数也可以根据实验测量数据进行预估，假设该平面的平均密度 $\rho_2 = \rho_{in}$ 、平均温度 $T_2 = T_{in}$ 、平均流速 $u_2 = U_{in}$ 。在获得满足湍流度要求的各向同性湍流场以后，就可以将该瞬态场变换到体系 2，然后作为背景湍流度加入到叶栅入口平面。假设叶栅计算域的展向宽度为 l_z ，显然，体系 1 中 $L_1 = 2\pi$ 变换到体系 2 以后，必然有 $L_2 = l_z$ ，利用式(B.11)，于是有：

$$\frac{L_{r_2}^*}{L_{r_1}^*} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{2\pi}{l_z} \quad (\text{B.23})$$

又由于在各向同性湍流的计算过程中，体积平均的密度和温度几乎不变，于是 $\rho_1 \approx 1$ 、 $T_1 \approx 1$ ，利用式(B.13)和(B.14)，可以得到：

$$\frac{\rho_{r_2}^*}{\rho_{r_1}^*} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_{in}} \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{T_{r_2}^*}{T_{r_1}^*} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{T_{in}} \quad (\text{B.25})$$

将式(B.25)代入式(B.15)有：

$$\frac{U_{r_1}^*}{U_{r_2}^*} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{T_{r_1}^*}{T_{r_2}^*}} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{T_{in}} \quad (\text{B.26})$$

再将式(B.23)~(B.25)代入式(B.22)，该式简化如下：

$$\frac{Re_1}{Re_2} = \rho_{in} T_{in} \frac{Ma_1}{Ma_2} \frac{l_z}{2\pi} \frac{(T_{r_1}^* + T_S^*)}{(T_{r_2}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.27})$$

前已述及，各向同性湍流场的计算雷诺数 Re_1 和参考温度 $T_{r_1}^*$ 不能任意选取，而是必须根据体系 1 和 2 的变换关系确定，由式(B.25)可知：

$$T_{r_1}^* = T_{r_2}^* T_{in} \quad (\text{B.28})$$

而雷诺数 Re_1 也可以利用式(B.27)计算：

$$Re_1 = \rho_{in} T_{in} \frac{Ma_1}{Ma_2} \frac{l_z}{2\pi} \frac{(T_{r_1}^* + T_S^*)}{(T_{r_2}^* + T_S^*)} Re_2 \quad (\text{B.29})$$

同一流场在体系 1 和体系 2 间的变换关系则由式(B.24)~(B.26)导出：

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_{in}} \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{T_{in}} \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{Ma_2}{Ma_1 \sqrt{T_{in}}} \quad (\text{B.32})$$

已知涡轮叶栅入口湍流度要求的前提下，利用体系 1 和 2 的变换关系，可以计算对各向同性湍流场均方速度脉动 ($\overline{u_1^2} + \overline{v_1^2} + \overline{w_1^2}$) 的期望值。对于涡轮叶栅入口平面，湍流度定义如下：

$$Tu = \frac{\sqrt{(\overline{u_{in}^2} + \overline{v_{in}^2} + \overline{w_{in}^2})/3}}{U_{in}} \quad (\text{B.33})$$

于是有：

$$\overline{u_{in}^2} + \overline{v_{in}^2} + \overline{w_{in}^2} = 3(TuU_{in})^2 \quad (\text{B.34})$$

由式(B.32)可知， $u_2' = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{T_{in}} u_1'$ ，代入上式即得：

$$\overline{u_1^2} + \overline{v_1^2} + \overline{w_1^2} = \frac{3}{T_{in}} \left(\frac{TuU_{in}Ma_2}{Ma_1} \right)^2 \quad (\text{B.35})$$

给定 Tu 取值后，利用上式，就可以计算出对各向同性湍流场均方速度脉动的期望值，以此确定某个时刻的瞬态流场满足要求。

B.3 来流尾迹的变换

相比背景湍流度的模拟，来流尾迹的生成过程更为复杂一些：计算首先针对充分发展的槽道湍流，在流场达到统计定常状态以后，取出某一瞬态结果，将该流场从槽道中心平面“切开”，分成上下两个部分，再将上下两个半槽道反向拼接在一起（壁面重合），去掉中间的固壁，沿法向扩大计算域，新增计算域内的流场按槽道中心位置的时均流动参数给出，由此得到尾迹流模拟的初场；接下来计算随时间演化的尾迹流动，这一过程中尾迹不断衰减，将特定时刻的瞬态流场变换到叶栅计算域中，如果变换后的尾迹特性与实验测量的尾迹特性一致，那么该瞬态流场就是尾迹变换需要的最终流场。

为了确定来流尾迹的变换关系，假设计算槽道流和尾迹流使用的是无量纲体系 1，而涡轮叶栅流场计算使用的则是无量纲体系 2。对于槽道流的计算，当流动进入统计定常状态以后，需要对瞬态流场进行长时间采样，由此获得时间平均（包括统计均匀方向空间平均）的流场解，假设在槽道中心位置得到的时均密度、温度和流向速度分别为 ρ_c 、 T_c 和 U_c 。接下来生成尾迹流的初始流场，如前所述，计算域内区初场来源于某瞬态槽

道流场（上下半槽道反向拼接），外区初场则被假设成均匀势流，其密度、温度、流向速度分别取 ρ_c 、 T_c 和 U_c ，其它速度分量设为 0，压力则由状态方程确定。在时间演化尾迹的模拟中，其雷诺数、马赫数、参考温度的取值均与槽道湍流的计算一致，分别为 Re_1 、 Ma_1 和 T_{r1}^* ，这就是槽道流和尾迹流均使用无量纲体系 1 的原因。由于缺少外力作用，尾迹流场随时间不断衰减，速度亏损持续减小，尾迹宽度则逐渐增加，理论上，从尾迹流得到的最终流场变换到体系 2 以后，其速度亏损及尾迹半宽均应与叶栅入口测量平面的尾迹特性一致；此外，最终流场势流区的流动也应该与叶栅入口平面尾迹区以外的流动相对应。

在涡轮叶栅所处的体系 2 中，许多计算参数都是已知的，比如雷诺数 Re_2 、马赫数 Ma_2 、参考温度 T_{r2}^* 等，而叶栅入口平面的流动参数也可以根据实验测量数据进行预估，假设该平面的平均密度、温度和流速分别为 ρ_{in} 、 T_{in} 和 U_{in} 。这里的 U_{in} 是叶栅参考系中的绝对流速，考虑到尾迹相对叶栅的周向运动，假设其运动速度为 U_{bar} ，那么气流在尾迹参考系中的相对速度 U_{rel} 可按下式计算：

$$U_{rel} = U_{in} - U_{bar} \quad (B.36)$$

体系 1 中最终流场的势流区，流动参数为 $\rho_1 = \rho_c$ 、 $T_1 = T_c$ 、 $u_1 = U_c$ ，该区域所对应的体系 2 叶栅入口平面尾迹以外区域，流动参数则取为 $\rho_2 = \rho_{in}$ 、 $T_2 = T_{in}$ 、 $u_2 = U_{rel}$ （尾迹参考系）。利用式(B.12)~(B.14)，可以得到：

$$\frac{U_{r2}^*}{U_{r1}^*} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{U_c}{U_{rel}} \quad (B.37)$$

$$\frac{\rho_{r2}^*}{\rho_{r1}^*} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_c}{\rho_{in}} \quad (B.38)$$

$$\frac{T_{r2}^*}{T_{r1}^*} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_c}{T_{in}} \quad (B.39)$$

将式(B.37)和(B.39)代入式(B.15)，于是有：

$$\frac{U_{r1}^*}{U_{r2}^*} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{T_{r1}^*}{T_{r2}^*}} \Rightarrow \frac{U_{rel}}{U_c} = \frac{Ma_1}{Ma_2} \sqrt{\frac{T_{in}}{T_c}} \quad (B.40)$$

体系 1 中马赫数 Ma_1 的计算公式可以写为：

$$Ma_1 = Ma_2 \frac{U_{rel}}{U_c} \sqrt{\frac{T_c}{T_{in}}} \quad (B.41)$$

将式(B.21)代入式(B.17)，可以得到：

$$\frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} = \frac{\rho_{r1}^* U_{r1}^* L_{r1}^*}{\rho_{r2}^* U_{r2}^* L_{r2}^*} \left(\frac{T_{r2}^*}{T_{r1}^*} \right)^{3/2} \frac{(T_{r1}^* + T_S^*)}{(T_{r2}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.42})$$

再将式(B.37)~(B.39)代入上式，于是有：

$$\frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} = \frac{\rho_{in} U_{rel} L_{r1}^*}{\rho_c U_c L_{r2}^*} \left(\frac{T_c}{T_{in}} \right)^{3/2} \frac{(T_{r1}^* + T_S^*)}{(T_{r2}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.43})$$

对上式变形可以得到：

$$\frac{L_{r2}^*}{L_{r1}^*} = \frac{\text{Re}_2}{\text{Re}_1} \frac{\rho_{in} U_{rel}}{\rho_c U_c} \left(\frac{T_c}{T_{in}} \right)^{3/2} \frac{(T_{r1}^* + T_S^*)}{(T_{r2}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.44})$$

假设叶栅计算域的展向宽度 $L_2 = l_z$ ，槽道或尾迹流计算域的展向宽度为 L_1 ，利用式(B.11)，于是有：

$$\frac{L_{r2}^*}{L_{r1}^*} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{L_1}{l_z} \quad (\text{B.45})$$

将式(B.44)代入上式：

$$L_1 = l_z \frac{L_{r2}^*}{L_{r1}^*} = l_z \frac{\text{Re}_2}{\text{Re}_1} \frac{\rho_{in} U_{rel}}{\rho_c U_c} \left(\frac{T_c}{T_{in}} \right)^{3/2} \frac{(T_{r1}^* + T_S^*)}{(T_{r2}^* + T_S^*)} \quad (\text{B.46})$$

总结上述公式，确定计算参数的整个过程可以归纳如下：在叶栅所处的体系 2 中，所有计算参数都是已知的，包括雷诺数 Re_2 、马赫数 Ma_2 、参考温度 T_{r2}^* 、计算域展向宽度 l_z 等，而叶栅入口平面的平均流动参数，如密度 ρ_{in} 、温度 T_{in} 、绝对流速 U_{in} 、相对流速 U_{rel} 等，则可以根据实验测量数据进行预估；对于体系 1，给定雷诺数 Re_1 ，再假定槽道中心的时均密度、温度和流向速度分别为 ρ_c 、 T_c 和 U_c 。上面的参数都给定以后，根据式(B.37)~(B.39)可以确定速度、密度和温度的变换关系，据式(B.39)得到体系 1 的参考温度 T_{r1}^* ，马赫数 Ma_1 则由式 (B.41) 计算，最后，槽道或尾迹流计算域的展向宽度由式(B.46)给出。但实际上，槽道中心的时均流动参数 ρ_c 、 T_c 和 U_c 是未知的，也就是说，必须在经过“确定流动参数、槽道流的计算、流场统计平均”这三个步骤以后，上述流动参数才能确定下来，实际执行过程中，首先假定 ρ_c 、 T_c 和 U_c 的取值，按上面三个步骤反复迭代，通常迭代 3~4 次以后，就可以获得满足要求的计算参数。

到目前为止，似乎所有的计算参数都已经被确定下来，但实际上，体系 1 的雷诺数 Re_1 是预先给定的，具有任意性；此外，如何确保最终的尾迹流场变换到体系 2 以后其速度亏损及尾迹半宽满足实验要求，也是必须解决的问题。首先考虑来流尾迹的特性，

在叶栅入口测量平面的实验数据中，包含了尾迹区速度亏损及尾迹半宽的信息，假设它们分别为 $\delta U_{\max 2}$ 和 $b_{half 2}$ ，对于最终的尾迹流场而言，其速度亏损 $\delta U_{\max 1}$ 和尾迹半宽 $b_{half 1}$ 应该满足如下条件：

$$\frac{\delta U_{\max 1}}{U_c} = \frac{\delta U_{\max 2}}{U_{in}} \quad (\text{B.47})$$

$$\frac{L_{r2}^*}{L_{r1}^*} = \frac{b_{half 1}}{b_{half 2}} \quad (\text{B.48})$$

于是，体系 1 中速度亏损 $\delta U_{\max 1}$ 和尾迹半宽 $b_{half 1}$ 的表达式分别为：

$$\delta U_{\max 1} = \delta U_{\max 2} \frac{U_c}{U_{in}} \quad (\text{B.49})$$

$$b_{half 1} = b_{half 2} \frac{L_{r2}^*}{L_{r1}^*} \quad (\text{B.50})$$

实际操作中，要获得完全满足尾迹特性要求的最终流场是非常困难的，计算过程通过调整雷诺数 Re_1 ，进行了数次试算，最后将 Re_1 的取值及尾迹流的最终流场确定下来。因此，来流尾迹的生成过程在一定程度上依赖于经验。

攻读博士学位期间取得的研究成果

发表的学术论文:

- [1] 叶建, 邹正平, 陆利蓬, 等. 低雷诺数下翼型前缘流动分离机制的研究, 北京航空航天大学学报, 2004, 30(8): 693-697.
- [2] 叶建, 邹正平, 逆压梯度下层流分离泡转捩的大涡模拟, 工程热物理学报, 2006, 27(3): 402-404.
- [3] 叶建, 邹正平, 低雷诺数下周期性尾迹/层流分离泡相互作用的大涡模拟, 工程热物理学报, 2007, 28(2): 215-218.
- [4] 邹正平, 叶建, 刘火星, 等. 低压涡轮内部流动及其气动设计研究进展, 力学进展, 2007, 37(4): 551-562.
- [5] 叶建, 邹正平, 复杂可压缩流动多块并行大涡模拟方法研究, 中国航空学会第一届航空发动机数值仿真与数字化设计技术交流会, 北京, 2008.

取得的软件著作权:

- [1] 叶建, 邹正平, 多块并行大涡模拟求解系统 V1.0 [简称: MPLES], 软件著作权登记号: 2008SRBJ0578.

受理的发明专利申请:

- [1] 邹正平, 刘火星, 叶建, 一种利用抽吸提高压气机叶栅负荷的方法, 受理号: 200710099105.7
- [2] 邹正平, 徐力平, 刘火星, 叶建, 李维, 多孔金属叶片耦合设计方法, 受理号: 200710100218.4

参与的主要科研项目:

- [1] 项目名称: 压力梯度流动环境中尾迹与边界层的相互作用

项目来源: 国家自然科学基金 (50206001)

研制时间: 2003 年 1 月~2005 年 12 月

本人承担的主要工作: 大涡模拟程序的编写, 采用大涡模拟研究尾迹与分离边界层的相互作用机理

[2] 项目名称：高空低雷诺数低压涡轮设计技术

项目来源：863-705 项目（2002AA75024）

研制时间：2002 年 10 月~2007 年 3 月

本人承担的主要工作：低雷诺数低压涡轮内部流动机理研究以及非定常 calming 效应的利用

[3] 项目名称：边界层流动控制对高负荷扩压叶栅内部流动及性能的影响

项目来源：航空科学研究基金（2007ZB51018）

研制时间：2007 年 10 月~2009 年 10 月

本人承担的主要工作：利用大涡模拟手段研究吹吸气等流动控制方法对边界层拟序结构时空演化机制的影响

致 谢

论文完成之际，首先要感谢我的导师陈懋章教授，作为领域内的著名专家，陈老师的日常工作十分繁忙，即便如此，除了在课题的大方向上给予指导外，论文定稿过程中，陈老师更是仔细阅读初稿并提出了很多宝贵的修改意见，导师严谨的治学态度和脚踏实地的工作作风，必将成为作者一生都享用不尽的精神财富。

副导师邹正平教授负责了论文的具体指导工作，从研究方向的确定、研究内容的选择、计算结果的分析直至最后阶段的论文撰写，邹老师都给予了大量细致而深入的指导；此外，邹老师也为我的研究工作提供了相对宽松的工作环境，使作者能够专注于同一个问题开展较为深入的研究。在此，向邹老师表示衷心的感谢。

我的硕士导师陆利蓬教授一直关心着作者的研究工作，除学业上的指导外，陆老师还在平时的生活中给予了作者很多关怀，在此向陆老师表示深深的谢意。

本论文的绝大部分计算工作都是在北航航空发动机数值仿真中心的高性能机群上完成的，仿真中心方韧教授对作者的学业和生活都给予了很多关心和帮助，在此向方老师表示诚挚的感谢，高军辉博士在机群使用方面为作者提供了大量帮助，在此也向高师兄真诚的说一声谢谢。

特别感谢课题组宁方飞副教授，在程序的发展过程中，宁老师给予了作者很多有益的建议和指导，而与宁老师的讨论交流更是使作者受益匪浅。此外，作者在生成涡轮叶栅网格时也参考了宁老师提供的网格生成程序。

感谢课题组蒋浩康教授对作者的关注和支持，感谢课题组马宏伟教授、刘宝杰教授、严明副教授、刘火星副教授、王宏伟老师、王效葵老师在很多方面的热情帮助。

攻读博士学位期间，与课题组的兄弟姐妹们结下了深厚的友谊：杨琳、张健、李海鹏、赵军、王丹华、綦蕾、张正秋、刘凯、柳阳威、高星、于贤君、刘晓嘉、张楠、吴晶峰、樊林、霍磊、李宇、周杨、方剑、弓三伟、段真真、干鹏、张伟昊、张红军、于美琳、刘斌、付超、王鹏、宋志强、高锋……，名字太多，无法一一列出，但请相信我的真诚：感谢你们的关心和帮助！

多年的求学生活中，得到了远方父母和亲友们最无私和最真挚的关怀，没有你们的一贯支持，我是不可能顺利完成学业的，在此，向我的亲人们表达自己最深的谢意。

最后，感谢我挚爱的女友卿文静，多年以来，因为我的学业，你做出了太多的牺牲，也给予了我最大的理解和支持，发自内心的对你说：谢谢！

作者简介

叶建，男，汉族，1978年4月生，四川郫县人。

1996年9月~2000年7月，北京航空航天大学动力工程系，飞行器动力工程专业，本科，获工学学士学位。

2000年9月~2003年4月，北京航空航天大学能源与动力工程学院，航空宇航推进理论与工程专业，硕士研究生，获工学硕士学位。

2003年9月至今，北京航空航天大学能源与动力工程学院，流体机械及工程专业，博士研究生。

目前工作集中在采用大涡模拟方法研究叶轮机械、特别是低压涡轮部件内部复杂流动机理。其他感兴趣的领域包括：湍流数值模拟方法，叶轮机械 CFD 技术，边界层转捩问题，涡动力学，流动控制技术。